（機械学会論文集，69, 682,A 編 (2003), 1021.）

衝撃負荷逆負荷に適用できる動的構成式について
（アルミニウム材の実験値との比較）

申　建汎 *1，放生明廣 *2
茶谷明義 *2，立矢　宏 *2

A dynamic constitutive equation applicable for impact loading and inverse loading
(Comparison with the experimental results for aluminum)

Jianxun SHEN, Akihiro HOJO,
Akiyoshi CHATANI and Hiroshi TACHIYA

Dept. of Mechanical Systems Engineering, Kanazawa University,
Kodatsuno, 2-40-20, Kanazawa, Ishikawa, 920-8667, Japan

In this paper, a dynamic constitutive equation that is applicable for impact loading and inverse loading was investigated. The numerical calculation was done for aluminum using finite difference method under the boundary condition of measured axial and angular velocities. The calculated stress and strain agreed well with the experimental ones under torsional and inverse torsional loadings about the strain rate of 40 1/sec. The comparison of calculated result with experimental one for the combined loadings of impact tension and torsion was also performed, and the validity of this constitutive equation was verified. Moreover, the appearing yield points were discussed based on some simulations under two-stage combined loadings of tension and torsion.

Key Words: Dynamic Constitutive Equation, Impact Strength, Combined Stress, High Strain Rates, Finite Difference Method, Bauschinnger Effect

1. 緒　　言

金属材料の応力ーひずみ曲線にはひずみ速度依存性,加工硬化やバウジンガ効果，繰返し負荷による硬化や軟化現象等さまざまな現象が現れるから，その動的挙動を明らかにするためには，逆負荷や組合せ負荷など様々な負荷経路での衝撃実験を行い，これに適用できる動的構成式を確立する必要がある．従来から引張りとねじりの組合せ衝撃試験がいくつか行われ，動的降伏条件の測定や Perzyna 型の構成式の検討などが行われている(1)~(6)が，これらは単純な比例負荷に対するものがほとんどであり，バウジンガ効果が表われる逆負荷など複雑な現象は取扱えないようである．

近年，低ひずみ速度域については，繰返し負荷，四角形経路など複雑な非比例負荷，ラチェット現象など様々なひずみ経路に適用できる構成式が提案されている(7)~(10)．また，それらによる計算値と実験値の詳細な比較もなされている．しかしながら，ひずみ速度が10~100 1/sec 以上の高ひずみ速度に対してはこのような構成式を適用し，その妥当性を検討した例はあまりないようである．以前筆者らは，Benallal ら(11)~(13)が提案したテンソル空間がなす角度を導入し，負荷，除荷あるいは弾性変形，塑性変形等を区別しない構成式を提案した(14).

本論文では，筆者らが試作した二段階衝撃試験機(15)を用いて短いアルミニウム試験片についてねじりー逆ねじり実験及びねじりと引張りの組合せ衝撃実験を行い，応力ーひずみ関係を測定し，その結果を上記の構成式による計算結果と比較し，本構成式の妥当性を検討した．また，引張りとねじりの組合せ衝撃に関するいくつかのシミュレーション計算も行い，見かけの動的降伏条件などについて検討を行った．

2. 構成式及び衝撃問題の解析

2.1 構成式　本構成式は過応力テンソルが内部状態変数テンソルとのなす角度を導入することにより，負荷，除荷あるいは弾性変形，塑性変形等を区別することなく統一的に表すとともに，加工硬化やバウジンガ効果等種々の影響を表すことを目指したものであり，詳細は文献(14)に譲るが，以下の式から構成される．

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left\{\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \delta_{ij}\frac{\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}^{e}_{kk}\right\} \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{3}{2}\frac{g(\bar{O})}{\bar{O}}O_{ij} \tag{3}$$

$$O_{ij} = s_{ij} - \alpha_{ij}, s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}}{3}, \bar{O} = \sqrt{\frac{3}{2}O_{ij}O_{ij}} \tag{4}$$

$$g(x) = \exp(C_1 + x/C_2) \tag{5}$$

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}\alpha_{ij}\alpha_{ij}} \tag{6}$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = K\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \tag{7}$$

$$K = K_0\beta(\xi) + K_1(1-\beta(\xi)), \qquad 0 \le \beta(\zeta) \le 1 \tag{8}$$

$$\xi = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{CC'}}} = \frac{\sqrt{1-s^2+s^2\cos^2\theta} - s\cos\theta}{2\sqrt{1-s^2+s^2\cos^2\theta}} \tag{9}$$

$$\cos\theta = \frac{O_{ij}\alpha_{ij}}{\sqrt{O_{ij}O_{ij}}\sqrt{\alpha_{ij}\alpha_{ij}}} \tag{10}$$

$$s = \bar{\alpha}/\bar{\alpha}_{\max}, K_0 = K_{\mathrm{sat}}(0), K_1 = K_{\mathrm{sat}}(\bar{\alpha}_{\max}) \tag{11}$$

ここで，σ_{ij} は応力テンソル，ε_{ij} は全ひずみテンソル，ε_{ij}^{e} および ε_{ij}^{p} はそれぞれ弾性および塑性ひずみテンソルであり，(・)は時間による微分を表す．s_{ij} は偏差応力テンソル，α_{ij} は移動硬化を表す内部状態変数テンソル，O_{ij} は過応力テンソルであり，$\bar{\alpha}$ 及び $\bar{O}$ はそれぞれミーゼスの条件による相当内部状態変数及び相当過応力である．$\bar{\alpha}_{\max}$ は $\bar{\alpha}$ が過去に取った最大値である．関数 $g()$ は塑性ひずみ速度依存性を表す関数であり，一軸の衝撃試験から決定できる．本研究では銅材やアルミニウムに適用される式(5)の指数則を用いる[16]．また，E はヤング率，ν はポアソン比，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

本構成式は式(7)に示すように，内部状態変数 α_{ij} の増分は塑性ひずみ ε_{ij}^{p} の増分に比例し，その比例係数 K をいろいろ変化させることにより様々な現象を表すようにしたものであり，K を決定する式(8)の考え方は以下のようである．

図 1 は一般的な負荷の状態を模式的に表したものである．過去に $\bar{\alpha}_{\max}$ まで負荷された後，現在の負荷点B点から C 点へ向って負荷される時，K は $K_0 = K_{\mathrm{sat}}(0)$ と $K_1 = K_{\mathrm{sat}}(\bar{\alpha}_{\max})$ の間の値をとると考えられる．そこで，これを第１近似として，$\xi = \overline{\mathrm{BC}}/\overline{\mathrm{CC'}}$ の関数 $\beta(\xi)$ を用い式(8)のように表す．なお，関数 $K_{\mathrm{sat}}(\bar{\alpha})$ は単純な一軸負荷曲線から求まる．

式(5)中の C_1, C_2 は材料定数であり一軸衝撃試験から決定でき，それぞれ降伏応力の値及びひずみ速度依存性の大きさに影響を与えると考えられる．簡単な計算により，C_2 はひずみ速度急変試験から次式で求まる．

$$C_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\ln(\dot{\varepsilon}_1^{p}/\dot{\varepsilon}_2^{p})} \tag{12}$$

ここで，σ_1, σ_2 はひずみ速度急変試験前後の応力であり，$\dot{\varepsilon}_1^{p}, \dot{\varepsilon}_2^{p}$ はその時の塑性ひずみ速度である．詳細はここで省くが，次節で述べる試験機を用いてひずみ速度急変試験を行った結果 C_2 □ 1.3MPa であった．

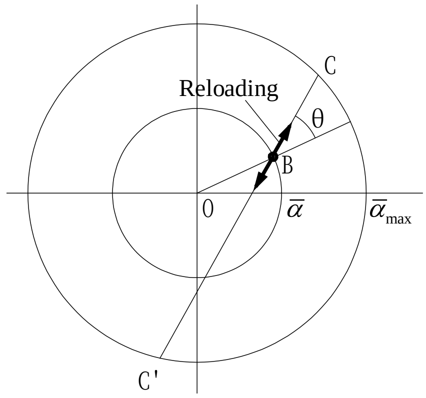


Fig.1. Schematic of the loading condition.

C_1 および式(8)中の関数型及びパラメータについては，物理的な根拠はあまりないが，計算値が静的なねじり－逆ねじり実験と一致するように，

$$K_{\mathrm{sat}}(x) = E(k_1 + k_2 \cdot \exp(x/k_3)), \quad x : \mathrm{MPa}$$
$$\beta(x) = \beta_1 x^{\beta_2} \tag{13}$$

ただし，

$$k_1 = 0.02, k_2 = 0.3, k_3 = 5\mathrm{MPa}, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1.5$$
$$E = 70\mathrm{GPa}, \nu = 0.33, C_1 = -83.5, C_2 = 1.3\mathrm{MPa}$$

としたものである．なお，これらの関数の物理的な意味については定数の決定法も含めて今後検討が必要である．静的なねじり－逆ねじりに対してこれらの定数や関数型を用いたときの計算値を実験値と比較した結果を図 2 に示す．同図を見れば，逆負荷時の再降伏付近で応力の計算結果は実験よりやや大きくなるが，この点を除けば両者がほぼ一致している．

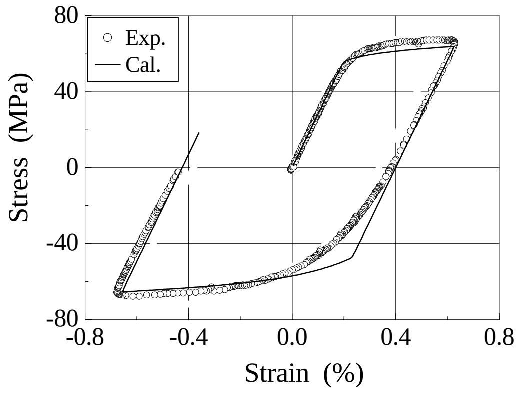


Fig.2. Comparison of the static experimental value with calculated one.

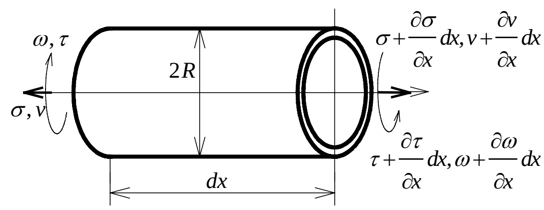


Fig.3. Thin walled cylinder.

2.2　薄肉円筒衝撃問題の解析　ラグランジェ座標系において，図 3 に示すような，衝撃引張り及びねじりを受ける薄肉円筒を考える．このような問題の基本式は次のように表される．

引張りに対して

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial\sigma}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t},\quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{1}{E}\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\dot{\varepsilon}^{p} \tag{14}$$

ねじりに対して

$$\rho R\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x},\quad R\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\gamma}{\partial t},\quad \frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{1}{G}\frac{\partial\tau}{\partial t}+\dot{\gamma}^{p} \tag{15}$$

となる．ここで，v, σ 及び ε はそれぞれ軸方向の速度，応力及びひずみで，ω, τ 及び γ は角速度，せん断応力及びせん断ひずみである．ρ, E, G 及び R はそれぞれ密度，ヤング率，横断面係数及び半径である．なお，式(14)と(15)中の三つの式はそれぞれ運動方程式，適合条件式および構成式である．

引張りとねじりの組合せ負荷の場合，応力成分と塑性ひずみ成分は

$$\begin{aligned}&\sigma_{11}=\sigma,\sigma_{12}=\tau,\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0\\&\varepsilon_{11}^{p}=\varepsilon^{p},\varepsilon_{12}^{p}=\frac{1}{2}\gamma^{p}\end{aligned} \tag{16}$$

となり，これらを本構成式に代入することにより，軸方向およびねじり方向の塑性ひずみはそれぞれ次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varepsilon}^{p}=\frac{3}{2}g(\bar{O})\frac{2\sigma/3-\alpha_{11}}{\bar{O}}\\&\dot{\gamma}^{p}=3g(\bar{O})\frac{\tau-\alpha_{12}}{\bar{O}}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}&\bar{O}=\sqrt{(\sigma-\frac{3}{2}\alpha_{11})^{2}+3(\tau-\alpha_{12})^{2}}\\&\bar{\alpha}=\sqrt{\frac{9}{4}\alpha_{11}^{2}+3\alpha_{12}^{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{\alpha_{11}^{2}+\frac{4}{3}\alpha_{12}^{2}}\\&\dot{\alpha}_{11}=K\dot{\varepsilon}^{p},\dot{\alpha}_{12}=\frac{K}{2}\dot{\gamma}^{p}\\&\cos\theta=\frac{(\sigma-\frac{3}{2}\alpha_{11})\alpha_{11}+2(\tau-\alpha_{12})\alpha_{12}}{\sqrt{(\sigma-\frac{3}{2}\alpha_{11})^{2}+3(\tau-\alpha_{12})^{2}}\sqrt{\alpha_{11}^{2}+\frac{4}{3}\alpha_{12}^{2}}}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

連立方程式(14)と(15)は準線形双曲形一階偏微分方程式系であり，特性曲線法[17][18]を用いて解くことができる．すなわち，特性曲線は

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=\pm c_{0},\quad c_{0}=\sqrt{E/\rho}\\&\frac{dx}{dt}=\pm c_{1},\quad c_{1}=\sqrt{G/\rho}\\&\frac{dx}{dt}=0\end{aligned} \tag{19}$$

となり，連立方程式はこれらの特性曲線に沿って次の全微分形に直すことができる．

$$\begin{aligned}&d\sigma\mp\rho c_{0}dv=-E\dot{\varepsilon}^{p}dt,dx=\pm c_{0}dt\\&d\sigma-Ed\varepsilon=-E\dot{\varepsilon}^{p}dt,dx=0\\&d\tau\mp\rho c_{1}Rd\omega=-G\dot{\gamma}^{p}dt,dx=\pm c_{1}dt\\&d\tau-Gd\gamma=-G\dot{\gamma}^{p}dt,dx=0\end{aligned} \tag{20}$$

初期条件及び境界条件を与えれば，この特性曲線に沿って差分をとることにより，各変数の値を求めることができる．図 4 に横軸を衝撃端からの距離 x，縦軸を時間 t とした場合の縦波の特性曲線網を示す．本論文では，計算を単純化するために，特性曲線網は縦波のものを用い，同図に示すねじりに対する特性曲線網との交点 R, S 点の値は，次式に示すように補間で求めた．なお，このような近似でも十分な精度が得られることは既に確かめてある．

$$\begin{aligned}&\phi_{\mathrm{R}}=\phi_{\mathrm{F}}+c(\phi_{\mathrm{E}}-\phi_{\mathrm{F}})\\&\phi_{\mathrm{S}}=\phi_{\mathrm{F}}+c(\phi_{\mathrm{G}}-\phi_{\mathrm{F}})\end{aligned} \tag{21}$$

ここで，$\phi=\sigma,\tau,\varepsilon,\gamma,\cdots$ であり，$c=c_{1}/c_{0}$ である．

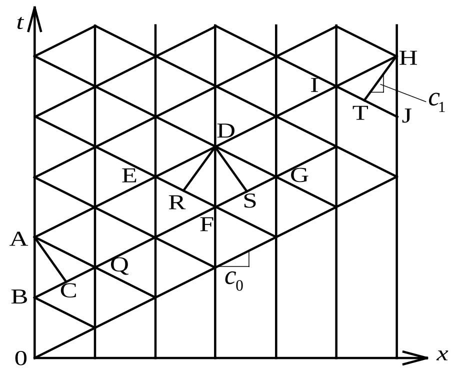
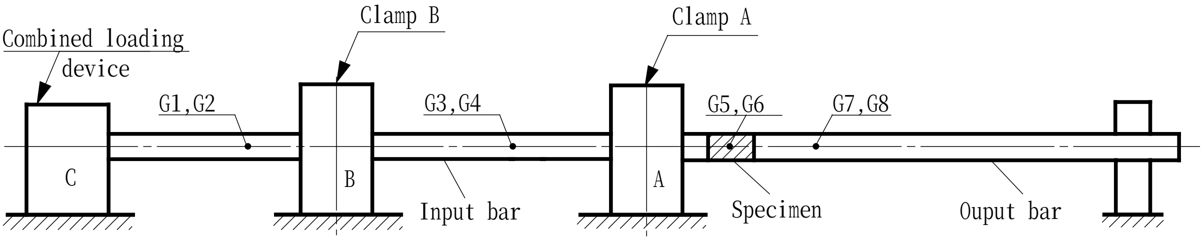


Fig.4. Characteristic mesh used for numerical calculation.

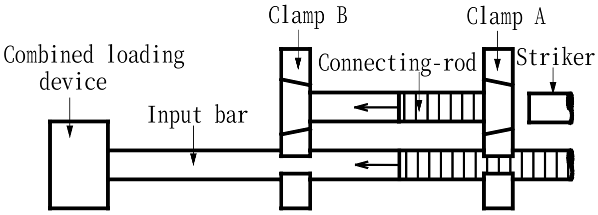
本研究では，以上のような構成式と解析方法を用い，次節に述べる試験機の実験結果より得られる軸方向速度および角速度を境界条件として与え，試験片のひずみおよび応力を計算し，実験結果と比較し本構成式の妥当性を検討する．

3.　実験方法及び実験材料

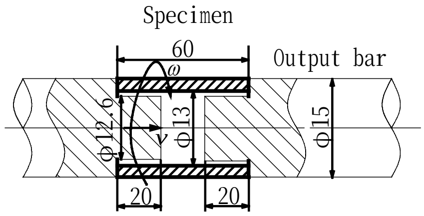
衝撃試験機の概要を試験片とともに図 5 に示す．同図(a)は二段階衝撃試験機の概略であり，トーションバーを利用したもので，入力棒と出力棒の間に試験片を取付ける．入力棒及び出力棒は，市販の軸受用丸棒(NB ファインシャフト，日本ベアリング社)から切り取ったもので，長さはそれぞれ 1200mm と 1300mm で，直径は共に 15mm である．同図に示すように入力棒の試験片側 A 点と B 点をそれぞれクランプし，左端 C 点に設置された組合せ負荷装置により，AB 間および BC 間にそれぞれ大きさおよび向きの異なる組合せ静荷重を蓄える．その後 2 つのクランプを A，B の順に解放することによって応力波を発生させ，試験片に二



(a). Schematic of the impact test machine.



(b). Stress wave propagation.



(c). Details of specimens.

Fig.5. The impact test machine and the specimens.

段階の組合せ負荷を加える．BC 間および AB 間の軸方向およびねじりの静荷重はそれぞれ適当な位置に貼付したひずみゲージ G1~G4 により測定する．試験片に生ずる軸ひずみε 及びせん断ひずみγ はそれぞれ試験片中央部に貼付したゲージ G5,G6 で測定し，また試験片を透過した軸方向荷重及びせん断荷重はそれぞれ出力棒に貼付したゲージ G7,G8 で測定しこれによる応力を試験片の応力と見なした．

本試験機では，2 つのクランプ A および B を設け，それぞれのくさび片を連結棒で連結することによってそれらをほぼ同時に解放する．図 5(b)はこのときの入力棒および連結棒中を伝ぱする応力波の様子を示すものである．打撃棒により連結棒を打撃すると，まずクランプ A が解放され，入力棒内に B に向かって除荷波が伝ぱしていく．それと同時に連結棒内にも応力波が伝ぱし，この応力波は時間$T = l / c_0$ 後にクランプ B に到達しこれを解放する．ここで，c_0 は連結棒中の縦波の伝ぱ速度，l は二つのクランプ間の距離である．このようにすればクランプ間の距離にもよるが，１回の打撃で 2 つのクランプを 100μs オーダーの時間差で解放することが可能である．同試験機を用いて性能試験を行い，一次元伝ぱ理論と比較し，両クランプの立上り時間が共に約 50μs で，衝撃試験機として十分であることがわかった(15)．

Table I. Chemical composition of specimen(wt %)

Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Zn
0.04	0.15	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01

図 5(c)は試験片および接着部の寸法を示したもので，試験片は直径 15mm 肉厚 1mm で市販のアルミニウム円筒から切り取った長さ 60mm のものを用いた．その化学組成を Table I に示す．実験では試験片直前入力棒側の軸方向変位及び回転角をそれぞれ 2 台のツィンマー(ZimmerOHG model 100D，ツィンマージャパン社)により測定し，それを時間に対して微分したものを境界条件として計算を行い，実験に測定した試験片中央部でのひずみ，及び試験片出力端での応力と比較した．また，試験片と入出力棒の連結には接着剤を用いることとした．接着剤は熱硬化性接着剤，Three Bond 2082C であり，80℃で 1 時間保持し硬化させた．

4. 計算と実験の比較

4.1 衝撃ねじりー逆ねじり実験　図 6 に本試験機を用いた衝撃ねじりー逆ねじりの実験結果と計算結果の比較を示す．同図中，白丸及び実線はそれぞれ実験及び計算に得られた応力ーひずみ関係であり，細線は静的なねじりー逆ねじり実験結果である．なお，計算

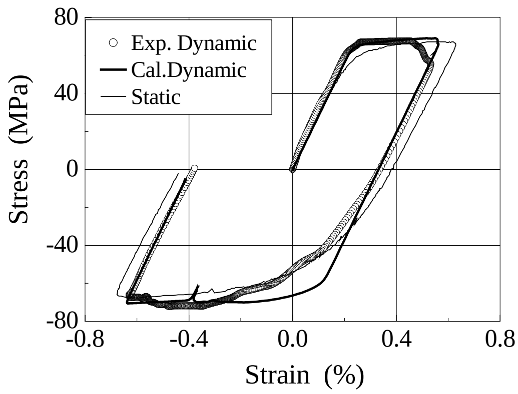


Fig.6. Comparison of the experimental value with calculated one under impact torsion and inverse torsion.

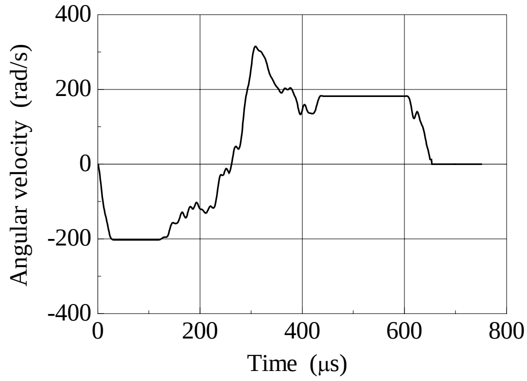
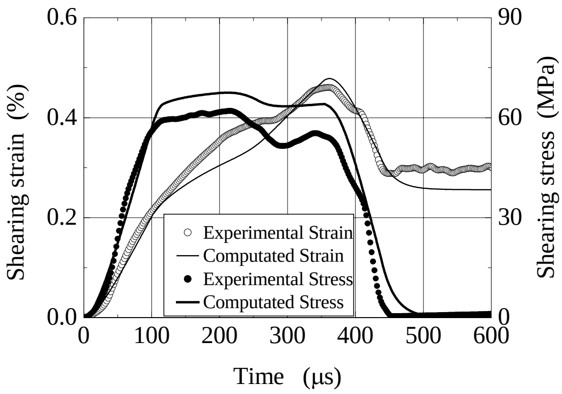
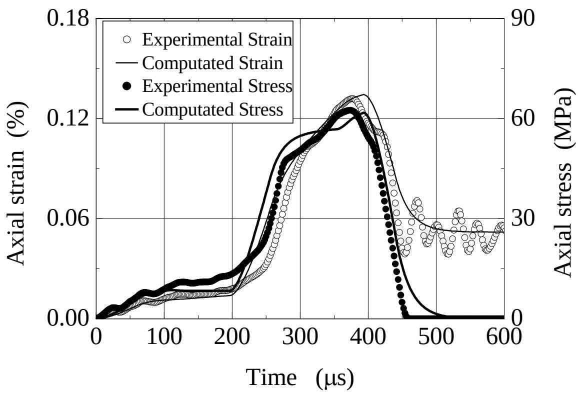


Fig.7. The relation between angular velocity and time.



(a). Torsional direction.



(b). Axial direction.

Fig.8. Comparison of the experimental value with calculated one under combined loadings.

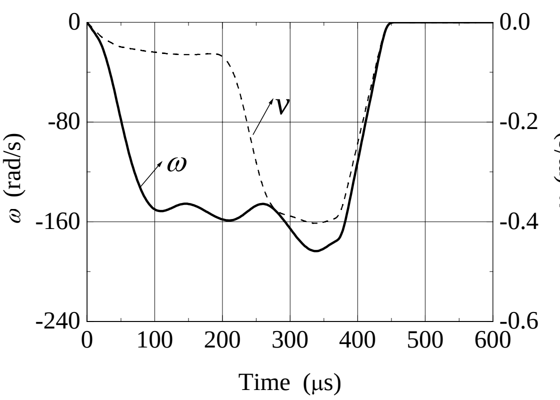


Fig.9. Applied axial and angular velocities.

は，これ以後のものも，試験片長さ 20mm とし両側の接着部はないものとして行い，応力は出力端での値，ひずみは中央での値である．同図をみれば，ひずみ速度依存性が見られ，アルミニウム試験片は動的負荷にも静的な試験と同様にバウジンガ効果が見られる．このようなバウジンガ効果は Ogawa(19)が純鉄を用いて行った衝撃引張圧縮の結果にも現れている．また，本構成式による計算値は図 2 の静的な場合と同様に逆負荷時の遷移域を除けば実験値とほぼ一致しており，本構成式は高ひずみ速度にも適用できると思われる．なお，図 7 に境界条件として与えた回転角速度と時間の関係を示す．

4.2 組合せ衝撃実験　図 8 はまず入力棒にクランプ A を締付ねじり荷重を加えた後，クランプ B を締付，更に BC 間に引張り荷重を加えて解放したときの応力およびひずみの測定結果と計算結果を比較したものである．同図(a)中，白丸および黒丸はそれぞれせん断ひずみおよびせん断応力の実験結果であり，細線および実線はそれらに対応する計算値である．同図(b)中，白丸および黒丸はそれぞれ軸方向のひずみおよび応力の実験結果であり，細線および実線はそれらに対応する計算値である．同図(a),(b)を見れば，塑性変形の初期においてねじりによるせん断ひずみがやや小さい（図(a)150μs~280μs の間）が，計算値と実験値はほぼ一致しており，本構成式及び用いた材料定数は妥当であると思われる．なお，計算では境界条件としてねじり－逆ねじりと同様に，試験片直前の回転角及び軸方向変位を測定し，それらを時間に対して微分したもの（図 9 のω , v）を回転角速度及び軸方向変位速度として用いた．図 9 によれば，クランプ A の解放時に若干の軸方向変位速度が発生している．これは，クランプ B の締付によって，AB 間にも微小な引張り荷重が加わったためと思われる．

4.3 比例負荷逆負荷時の計算例　引張り－ねじりの組合せ衝撃負荷逆負荷を想定したシミュレーション計算を行い，見かけの降伏条件などについて検討を行った．図 10 は，計算時に試験片入力棒側端面に与えた回転角速度ωと軸方向変位速度 v の一例であり，このような境界条件 ωと v の振幅を変え計算を行い得られた応力経路を図 11 に示す．図 12 に応力経路が約 30° の時σ とε， $\sqrt{3}\tau$ と$\gamma/\sqrt{3}$ の関係を示す．同図から応力－ひずみ関係が直線から離れはじめる点 A，A' および B，B'の応力値をそれぞれ負荷時および逆負荷時の降伏点としたものをまとめて図 13 に示す．なお，負荷時逆負荷時の各降伏点において，引張り応力とねじり応力は同一時間での値である．同図を見れば，負荷逆負荷時に降伏点はミーゼスの円の上にある．また，逆負荷時はバウジンガ効果により円の半径は小さくなる．

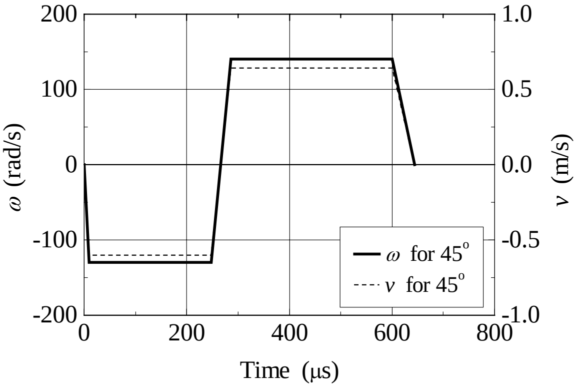


Fig.10. Applied axial and angular velocity.

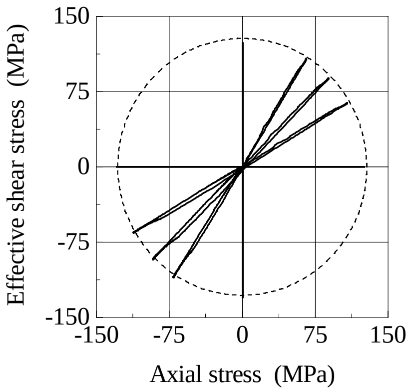


Fig.11. Calculated stress path.

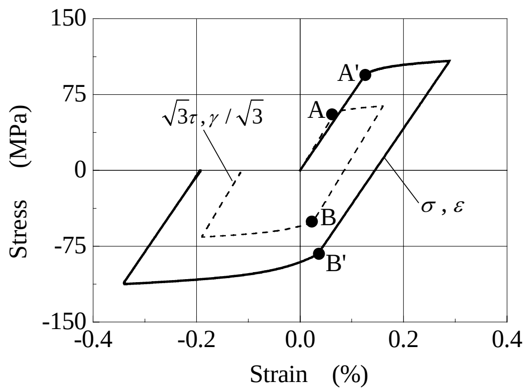


Fig.12. Stress-strain relation.

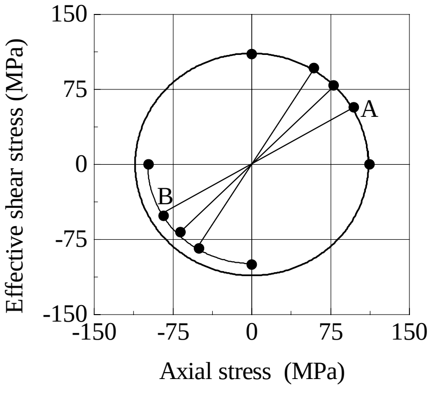


Fig.13. Calculated yield stress under combined tension and torsion.

5. 結　　言

本研究では，筆者らが提案した逆負荷時にも適用できる動的構成式を用い引張りとねじりの組合せ衝撃を受ける薄肉円筒の応力ーひずみ関係を計算し，二段階衝撃試験機による実験結果と比較し，その妥当性を検討した．結果をまとめると以下のようである．

(1). 本構成式では，内部変数テンソルとその増分がなす角度を導入することにより，除荷，負荷状態を記述している．本構成式を用いれば，降伏応力を定義する必要なく，また，弾性域，塑性域を区別することなく，変形挙動を表すことができる．

(2). アルミニウムについて，ひずみ速度急変試験および静ねじり試験から求めた材料定数を用いた計算値を，二段衝撃試験機により得られたねじりー逆ねじり，およびねじりー引張りの実験結果と比較し，両者はほぼ一致していることが分かった．

(3). 比例負荷逆負荷時のシミュレーション計算結果により，負荷逆負荷時の降伏点はミーゼスの円の上にあるとともに，逆負荷時はバウジンガ効果により円の半径は小さくなることがわかった．

参考文献

(1) Lipkin, J. and Clifton, R. J., *Trans. ASME*, Ser. E, **37**-12(1970), 1107-1112.

(2) 谷村真治・ほか三名，機論，**44**-378，A(1983)，497-504.

(3) 放生明廣・茶谷明義，機論，**43**-375，A(1982)，3994-4001.

(4) 福岡秀和・ほか三名，機論，**43**-367，A(1982)，883-887.

(5) 放生明廣・茶谷明義，機論，**44**-384，A(1983)，2568-2576.

(6) 放生明廣，機論，**48**-429，A(1987)，633-640.

(7) Perzyna, P., Quart. Appl. Math, 20(1963), 321-332.

(8) 佐々木克彦・石川博將，機論，**59**-562，A(1993)，1451-1457.

(9) 大野信忠・ほか三名，機論，**63**-609，A(1997)，67-75.

(10) Itoh, T., Chen, X., Nakagawa, T. and Sakane, M., *Trans. ASME*, Ser. H, **122**-1(2000), 1-9.

(11) Benallal, A., Marquis, D., *Trans. ASME*, Ser. H, **109**-10(1987), 326-336.

(12) Moosbrugger, J., C., McDowell, D., L., *Trans. ASME*, Ser. H, **111**-1(1989), 87-98.

(13) 中村俊哉・ほか三名，機論，**66**-649，A(2000)，88-93.

(14) Hojo, A., et. al., APCFS&ATEM'01, JSME-MMD, SENDAI, Oct. (2001), 472-477.

(15) Shen, J., et. al., APCFS&ATEM'01, JSME-MMD, SENDAI, Oct. (2001), 461-466.

(16) 放生明廣・茶谷明義・佐々木芳彦，材料，**34**-387(1985)，1400-1405.

(17) Courant, R. and Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics, Ⅱ, Partial Differential Equations, (1962), 424-427, Interscience.

(18) Jeffrey, A. and Taniuti, T., Non-Linear Wave Propagation, (1964), 65-71, Academic.

(19) Ogawa, K., *Exp. Mech.*, **24**-2(1984), 81-86.