

一端に衝撃速度を受ける半無限長棒中の弾塑性波の伝ば
(ひずみ速度非依存性の場合)*

基礎式

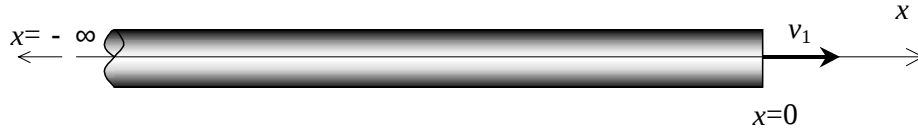


図 1

図 1 に示す縦衝撃を受ける棒の運動方程式は次式となる .

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1)$$

ここで , u, σ は変位及び引張応力であり x, t は棒に沿った位置及び時間 , ρ は棒の密度である .

応力がひずみ ε の関数

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad \text{ここで} \quad \varepsilon = \partial u / \partial x$$

で与えられるものとすれば , 式(1)右辺は

$$\frac{\partial(\sigma(\varepsilon))}{\partial x} = \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

したがって

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$\text{ただし} \quad c(\varepsilon) = \sqrt{H / \rho} \quad , \quad H = d\sigma / d\varepsilon$$

H は応力 - ひずみ曲線の接線の勾配であり弾性域ではヤング率 E である . 以下では応力 - ひずみ曲線は上に凸すなわち $H(\varepsilon)$ は単調減少の場合を考える .

一端に一定衝撃速度を受ける棒

衝撃端 $x = 0$ に一定速度 v_1 を受ける $-x$ 方向にのびた半無限長棒について式(2)の解を考える .

最初に , 適当なひずみ ε_1 ($\varepsilon_1 = \text{const}$) について

$$u = v_1 \cdot \{t + x / c(\varepsilon_1)\} \quad (3)$$

$$\text{ただし , } x = 0 \text{ において } \varepsilon_1 = v_1 / c_1 \quad , \quad c_1 = c(\varepsilon_1)$$

と置けば , これは式(2)を満足している .

次に

$$\varepsilon = f(\xi) \quad (4)$$

$$\text{ただし , } \xi = x / t$$

となる解を考える . このとき , 変位は

$$u(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \varepsilon(z/t) dz = t \int_{-\infty}^{\xi} f(\eta) d\eta$$

と表せるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial(\partial u / \partial x)}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{t} f'(\xi) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} = \left\{ \frac{dt}{d\xi} \int_{-\infty}^{\xi} f(\eta) d\eta + t \cdot f(\xi) \right\} \left(-\frac{x}{t^2} \right) = \int_{-\infty}^{\xi} f(\eta) d\eta - \xi \cdot f(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial(\partial u / \partial t)}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} = \{ f(\xi) - f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi) \} \left(-\frac{x}{t^2} \right) = \frac{\xi^2}{t} \cdot f'(\xi) \end{aligned}$$

したがって、式(2)は

$$\left\{ \frac{\xi^2}{t} - c^2(\varepsilon) \frac{1}{t} \right\} f'(\xi) = 0$$

となり、解は次のようになる。

$$f'(\xi) = 0 \quad (5)$$

$$\text{または} \quad \frac{x}{t} = -c(\varepsilon) \quad (6)$$

解(5)は $\varepsilon = \text{const}$ であるから解(3)に対応しており、

$$\text{衝撃端} \quad -\frac{x}{t} \geq c_1 = c(\varepsilon_1)$$

$$\text{では} \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = v_1 / c(\varepsilon_1)$$

となるひずみ一定領域が発生することを示す。

一方、 $c(\varepsilon) > c_1$ では解(6)より $x/t = -c(\varepsilon)$ であるから

時刻 t では位置 $x = -t \cdot c(\varepsilon)$ ($\varepsilon < \varepsilon_1$) のひずみが ε となっている。

すなわち、ひずみ ε そして応力とひずみは 1 対 1 対応するから

$$\text{応力 } \sigma(\varepsilon) \text{ が伝ば速度 } c = \sqrt{(d\sigma / d\varepsilon) / \rho}$$

で $x < 0$ の方向へ伝ばする事を表す。

なお、式(6)の解を ε について表せば

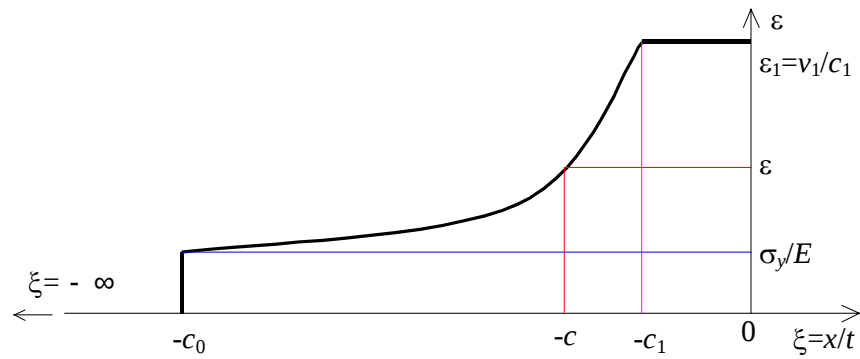
$$\varepsilon = c^{-1}(-x/t) \quad c^{-1}(\xi) \text{ は } c(\xi) \text{ の逆関数} \quad (6')$$

である。

最後に $\sigma < \sigma_y$ においては弾性域すなわち $c = \sqrt{E / \rho} = c_0$ (E はヤング率) で一定であ

るから、応力は弾性波の速度で ($x < 0$ の方向へ) 伝ばする。

以上の解を模式的に示せば下図のようになる。



上図の解において，ひずみ一定領域のひずみ値 ε_1 は以下のように求まる．

任意の時刻 t における衝撃端の変位は $u|_{x=0} = v_1 t$ であるから次式が成立する．

$$v_1 = \frac{u|_{x=0}}{t} = \frac{\int_{-\infty}^0 \varepsilon(x) dx}{t}$$

式中の積分は棒のひずみ分布図の面積である．この面積は ε 軸に関する積分

$$\int_0^{\varepsilon_1} t \cdot c(\varepsilon) d\varepsilon$$

とも書けるから，

$$v_1 = \int_0^{\varepsilon_1} c(\varepsilon) d\varepsilon = v(\varepsilon_1) \quad (7)$$

となり， $c(\varepsilon)$ が与えられていれば， v_1 に対応する ε_1 が求まる．

計算例

応力 - ひずみ曲線が

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} \bar{\varepsilon} & \bar{\varepsilon} < 1 \\ 1 + \frac{\ln(1 + a(\bar{\varepsilon} - 1))}{a} & 1 < \bar{\varepsilon} \end{cases} \quad [a]$$

$$\text{ただし, } \sigma = \sigma_y \cdot \bar{\sigma}, \quad \varepsilon = \varepsilon_y \bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_y}{E} \bar{\varepsilon}$$

とした計算例を以下に示す．

応力 - ひずみ曲線の接線の勾配は

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d(\sigma_y \bar{\sigma})}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\bar{\varepsilon}} = \sigma_y \cdot \frac{E}{\sigma_y} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = E \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}}$$

$$\text{ここで} \quad \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \begin{cases} 1 & \bar{\varepsilon} < 1 \\ \frac{1}{1 + a(\bar{\varepsilon} - 1)} & 1 < \bar{\varepsilon} \end{cases}$$

であるから，

$$c(\bar{\varepsilon}) = \begin{cases} c_0 = \sqrt{E/\rho} & \bar{\varepsilon} < 1 \\ \frac{c_0}{\sqrt{1+a(\bar{\varepsilon}-1)}} & 1 < \bar{\varepsilon} \end{cases}$$

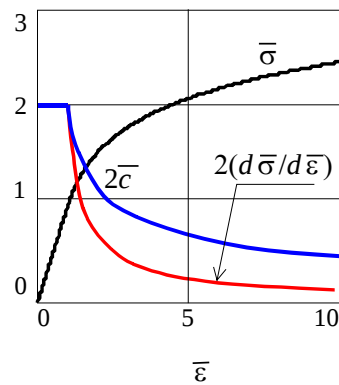
$$v_1 = \int_0^{\bar{\varepsilon}_1} c_0 \varepsilon_y d\bar{\varepsilon} + \int_1^{\bar{\varepsilon}_1} \frac{c_0 \varepsilon_y}{\sqrt{1+a(\bar{\varepsilon}-1)}} d\bar{\varepsilon} = c_0 \varepsilon_y \left\{ \frac{a-2}{a} + \frac{2}{a} \sqrt{1+a(\bar{\varepsilon}_1-1)} \right\}$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\bar{v}_1^2 a + 2(2-a)\bar{v}_1 + a}{4}$$

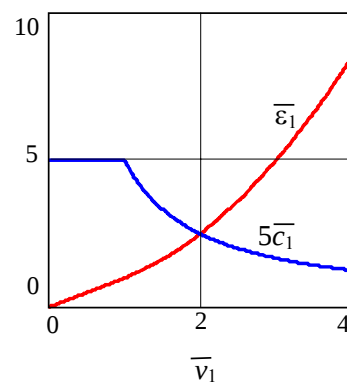
ただし $\bar{v}_1 = \frac{v_1}{v_y}$, $v_y = c_0 \varepsilon_y$ $\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_y}$

v_y は ε_1 が降伏ひずみとなる速度

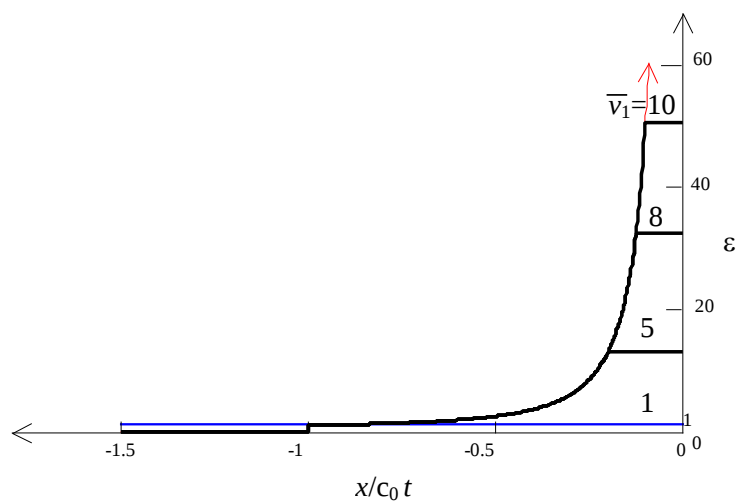
$a = 2$ の場合の計算結果を下図に示す .



応力 - ひずみ曲線



衝撃端の速度 - ひずみ



衝撃端速度と塑性ひずみ分布