

## ・材料力学的手法による衝撃応力解析

### 1．動的フックの法則と図式解法

ここでは、応力波の伝ば現象を簡単に評価し縦衝撃問題の特徴を把握する方法として、動的フックの法則を定義し、これを利用した図式解法について述べる。その後、一次元波動方程式に基づくラプラス変換解を材料力学的手法で求める方法をいくつかの例題とともに示し、数値ラプラス逆変換法によって時間域での解を求める手順を示す。

#### a． 動的フックの法則

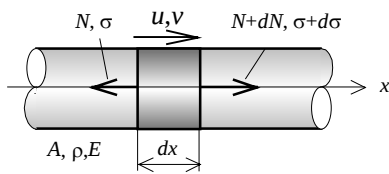


図 2.1 縦衝撃を受ける丸棒

図 2.1 のような縦衝撃を受ける丸棒の基礎式は次の波動方程式となる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.1)$$

ここで、 $\phi$  は変位  $u$ 、変位速度  $v$ 、応力  $\sigma$  あるいはひずみ  $\varepsilon$  であり、 $E, \rho, C$  はそれぞれヤング率、密度および縦波の伝ば速度である。また、変位とひずみ、応力、変位速度及び軸力  $N$  の関係は次のようである

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} \\ N &= A\sigma \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ただし、 $A$  は断面積

式(2.1)の一般解は

$$\phi = \phi_R(x - ct) + \phi_L(x + ct)$$

ここで、 $\phi_R()$  :  $x > 0$  方向へ伝ばする波

$\phi_L()$  :  $x < 0$  方向へ伝ばする波

であるから、変位を

$$u = u_R(x - ct) + u_L(x + ct)$$

とおけば、変位速度は  $v = \partial u / \partial t$  より

$$v_R + v_L = -Cu'_R + Cu'_L$$

と書け、応力は  $\sigma = E(\partial u / \partial x)$  より

$$\sigma_R + \sigma_L = Eu'_R + Eu'_L$$

と書けるから

$$\sigma_R = -Ev_R / C, \quad \sigma_L = Ev_L / C$$

となる。ここで、 $\phi' = d\phi(\xi) / d\xi$  を表す。

以上まとめると応力と変位速度の関係は次のようになる。

$$\sigma = \mp \frac{v}{C} E, \quad C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.3)$$

ただし、 $-$  :  $x > 0$  方向へ伝ばするとき、  
 $+$  :  $x < 0$  方向へ伝ばするとき

式(2.3)を動的フックの法則と定義する。なお、これは波動として伝ばしている成分について成立するものであり、ある位置のある時刻における応力と変位速度は、その時までそこに到達した波動成分を全て加え合わせた値になり、これらトータルの応力とひずみの間には静的なフックの法則が成立している。

#### b． 応力波の発生と反射透過

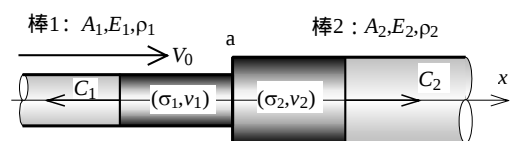


図 2.2 棒の衝突による応力の発生

図 2.2 のように棒 1 が相対速度  $V_0$  で棒 2 に衝突すると、衝突面には次の応力波が発生し各棒中を伝ばする。

棒 1

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{V_0}{C_1} E_1 \\ v_1 &= -\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

棒 2

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \frac{V_0}{C_2} E_2 \\ v_2 &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} V_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここで、 $Z_1, Z_2$  は音響インピーダンス

$$Z_1 = A_1 \rho_1 C_1, \quad Z_2 = A_2 \rho_2 C_2 \quad (2.6)$$

である。

衝突後、棒 1, 2 にはそれぞれ  $(\sigma_1, v_1)$ ,  $(\sigma_2, v_2)$  の成分を持つ応力波が発生すると考えると、棒 1 を伝わる応力波は  $x < 0$  方向、棒 2 を伝わる応力波は  $x > 0$  方向に伝ばするから、動的フックの法則より

$$\sigma_1 = v_1 E_1 / C_1, \quad \sigma_2 = -v_2 E_2 / C_2$$

そして、衝突面 a の応力と変位速度は

$$\text{棒 1 では } v_a^1 = V_0 + v_1, \quad \sigma_a^1 = \sigma_1$$

$$\text{棒 2 では } v_a^2 = v_2, \quad \sigma_a^2 = \sigma_2$$

となる。衝突面では、両棒の変位速度は等しく、力の釣合が成立しているから

$$v_a^1 = v_a^2, \quad A_1 \sigma_1 = A_2 \sigma_2$$

これらより上式が得られる。なお、エネルギー保存則からも同様の結果となる 1)

#### 剛体壁への衝突

( $C_1 = C, E_1 = E, E_2 = \infty \therefore C_2 = \infty$ )

$Z_2 = \infty$  であるから

$$\sigma_1 = -\sigma_0 \quad \text{ただし} \quad \sigma_0 = \frac{V_0}{C} E \quad (2.7)$$

鋼材,  $E = 200[\text{GPa}], C = 5120[\text{m} \cdot \text{Sec}^{-1}]$

$$\sigma_1 \approx -40V_0 [\text{MPa}]$$

$V_0$  の単位は  $[\text{m}/\text{Sec}]$

#### 同質同断面の棒の衝突

( $C_1 = C_2 = C, E_1 = E_2 = E, A_1 = A_2$ )

$Z_1 = Z_2$  であるから、

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{V_0}{2C} E = -\frac{\sigma_0}{2} \quad (2.8)$$

鋼材,  $\sigma_1 = \sigma_2 \approx -20V_0 [\text{MPa}]$

#### 同質異断面の棒の衝突

( $C_1 = C_2 = C, E_1 = E_2 = E$ )

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{A_2}{A_1 + A_2} \sigma_0, \quad \sigma_2 = -\frac{A_1}{A_1 + A_2} \sigma_0 \\ v_1 &= -\frac{A_2}{A_1 + A_2} V_0, \quad v_2 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} V_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

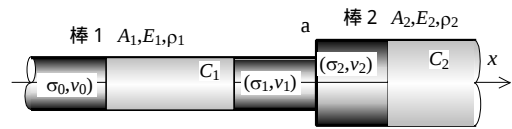


図 2.3 応力波の反射・透過

次に、図 2.3 のように棒中を伝播してきた応力波が境界で反射透過する場合を考える。

棒 1 中を伝ばする応力波  $(\sigma_0, v_0)$  が棒 2 との境界で反射透過し、棒 1 には応力波  $(\sigma_1, v_1)$  が反射し、棒 2 には応力波  $(\sigma_2, v_2)$  が透過するとすれば、応力及び変位速度の反射率、透過率は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &\equiv \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ \alpha_{12} &\equiv \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{A_1}{A_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &\equiv \frac{v_1}{v_0} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ \beta_{12} &\equiv \frac{v_2}{v_0} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

反射透過後、棒 1 の境界面 a の応力と速度は

$$v_a^1 = v_0 + v_1, \quad \sigma_a^1 = \sigma_0 + \sigma_1$$

棒 2 の境界面では  $v_a^2 = v_2, \quad \sigma_a^2 = \sigma_2$

そして  $v_a^1 = v_a^2, \quad A_1 \sigma_a^1 = A_2 \sigma_a^2$

また、 $\sigma_0 = -E_1 v_0 / C_1, \quad \sigma_1 = E_1 v_1 / C_1$

$$\sigma_2 = -E_2 v_2 / C_2$$

これらより上式が求まる。

自由端反射 ( $E_2 = 0 \therefore C_2 = 0$ )

$Z_2 = 0$  であるから

$$\alpha_{11} = -1, \beta_{11} = 1 \quad (2.12)$$

自由端では応力は常に 0 ,  
変位速度は入射応力波の 2 倍となる

固定端反射 ( $E_2 = \infty \therefore C_2 = \infty$ )

$Z_2 = \infty$  であるから

$$\alpha_{11} = 1, \beta_{11} = -1 \quad (2.13)$$

固定端の応力は入射応力の 2 倍となり ,  
速度は不変 .

音響インピーダンスが同じ場合

$Z_1 = Z_2$  であるから

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= 0, \quad \alpha_{12} = \frac{A_1}{A_2} \\ \beta_{11} &= 0, \quad \beta_{12} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

すなわち

$\sigma_1 = 0, v_1 = 0, \sigma_2 = A_1 \sigma_0 / A_2, v_2 = v_0$   
となり , 応力波の反射は生じない

材質が同じ場合

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}, \quad \alpha_{12} = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} \\ \beta_{11} &= -\alpha_{11}, \quad \beta_{12} = \alpha_{12} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

### c . 図式解法

以上の結果を基に , 棒中に発生伝播する  
応力波を図式解法から求める方法を , 図 2.4  
の同じ材質の 2 本の棒の衝突を例に示す .

同図は横軸に時間 , 縦軸に棒に沿った距離  
をとったグラフ上に , 応力波頭の伝ば軌跡  
を直線で描いたものであり , 各軌跡にはその  
応力波の応力と変位速度を記してある .

[1] 棒1が速度  $V_0$  で同じ材質の棒2に衝突す  
れば , 式(2.9)より , 両棒には次の圧縮  
応力が発生しそれぞれ , 上方及び下方  
へ向かって伝ばしはじめる .

$$\text{棒1: } (-\sigma_1, -v_1), \text{棒2 } (-\sigma_2, v_2) \quad [a]$$

ここで ,  $\sigma_0 = V_0 E / C$  とおいて

$$\sigma_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} \sigma_0, v_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} V_0$$

$$\sigma_2 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} \sigma_0, v_2 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} V_0 \quad [b]$$

これらは , それぞれ棒1の上端 , 棒2の下  
端で自由端反射し次式の引張応力波

$$\text{棒1: } (\sigma_1, -v_1), \text{棒2: } (\sigma_2, v_2) \quad [c]$$

が引き返す . 時刻  $t_1 = 2L_1 / C$  には棒 1 を  
応力波が一往復し , この時点で棒1は

$$\text{応力 } 0, \text{速度 } \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} V_0 \quad [d]$$

となる .

[2] その後は , 棒の断面積比によって次のよ  
うにふるまう .

[a]  $A_1 = A_2$  の場合

- 衝突面における応力の反射率は 0  
であるから , 応力波

$$(\sigma_1, -v_1) \equiv (0.5\sigma_0, -0.5V_0)$$

- はそのまま棒2へ透過し , 棒2の応  
力 , 速度も打ち消して行く .

- 時刻  $t_2 = 2L_2 / C$  に棒 2 下端で反射  
した引張応力が衝突面に到達 .

- この時点で , 衝突面は既に応力 0  
となっているので , 引張応力は衝  
突面を通過できず , 両棒は離れる .  
これ以後棒 1 は完全に静止し棒 2  
には 2 つの応力波が自由端反射を  
繰返し伝ばする .

[b]  $A_1 < A_2$  の場合

- 棒2の速度は負 , すなわち図の上  
方へ動くので両棒は離れ衝突面は  
自由端となる .

- 棒1には新たな応力波は発生せず  
これ以後応力 0 で , 最初飛んでき  
た方向と逆方向へ飛び去る .

- 棒2には既に生じていた応力を打  
ち消すために ,  $(\sigma_2, -v_2)$  の応力波  
が新たに発生し伝ばする .

[c]  $A_1 > A_2$  の場合

- 棒 1 から 2 へ伝ばする応力波が衝  
突面で反射透過した後も衝突面の  
応力は圧縮となり接触は保たれ ,  
次の応力波が伝ばする .

$$\left. \begin{array}{l} \text{棒 1 } (\sigma_1 \alpha_{11}, -v_1 \beta_{11}) \\ \text{棒 2 } (\sigma_1 \alpha_{12}, -v_1 \beta_{12}) \end{array} \right\} [e]$$

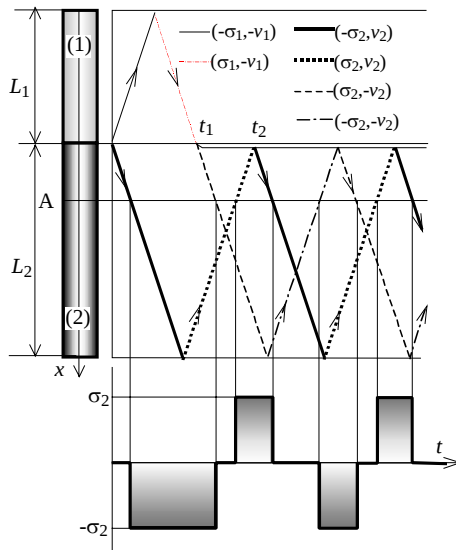
ただし,

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{11} = -\beta_{11} = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} \\ \alpha_{12} = \beta_{12} = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} \end{array} \right\} [f]$$

・時刻  $t_2 = 2L_2/C$  に棒 2 下端からの  
反射波  $(\sigma_2, v_2)$  が衝突面へ到達し,  
この時両棒は離れ, 衝突面の応力  
が 0 とならねばならないから, 両  
棒の衝突面には,

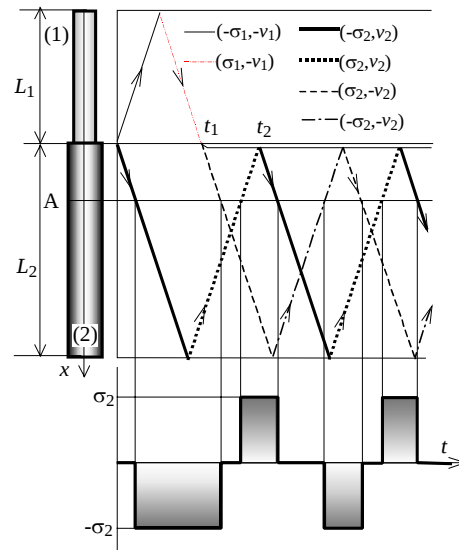
$$\left. \begin{array}{l} \text{棒 1 } (-\sigma_1 \alpha_{11}, -v_1 \beta_{11}) \\ \text{棒 2 } (-\sigma_1 \alpha_{12}, v_1 \beta_{12}) \end{array} \right\} [g]$$

の応力波が発生し伝ばする.



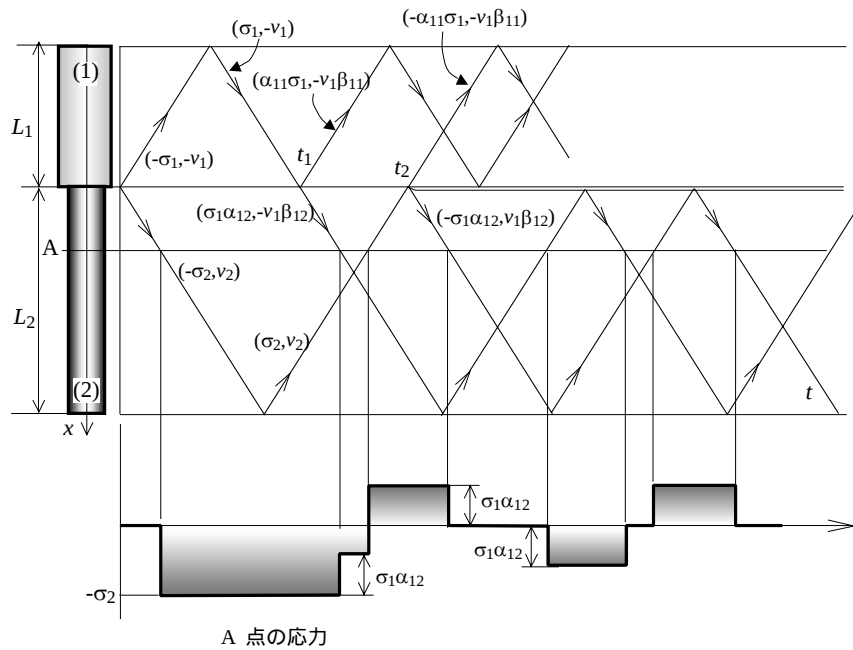
A 点の応力

[a]  $A_1 = A_2$  の場合



A 点の応力

[b]  $A_1 < A_2$  の場合



A 点の応力

[c]  $A_1 > A_2$  の場合

図 2.4 2 本の棒の衝突による応力



$$\left. \begin{aligned} \beta'_{11} &= \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{Z'_1 - Z'_2}{Z'_1 + Z'_2} \\ \beta'_{12} &= \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{2Z'_1}{Z'_1 + Z'_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

となる．

注) 図 2.5 のように，回転角，回転角速度は右ねじの進む方向が  $x > 0$  方向となるものを正，内力としてのトルクとせん断応力は断面の外向き法線ベクトルの方向と一致するものを正とする．

### ねじりと縦衝撃の組合せ

ねじり衝撃と縦衝撃の組合せ例として，図 2.6 のように横棒 1 に取り付けられたピンを落下棒 2 で打撃するとき横棒に発生するねじり応力波について考える．

同図(a)のように，落下棒 2 が速度  $V_0$  で横棒 1 に取り付けられたピンに衝突した瞬間，落下棒には  $(\sigma, v)$  の縦波、横棒には  $(\tau, \omega)$  のねじり波が発生それぞれの棒中を伝ばすると考える．

簡単のためにピンを剛体と見なせば，力の釣合及び変位の条件は

$$\frac{I_{p1}}{R_1} \tau = a A_2 \sigma, \quad a \omega = V_0 + v$$

動的フックの法則より

$$\frac{\tau}{R_1} = -\frac{\omega}{C'_1} G_1, \quad \sigma = \frac{v}{C_2} E_2$$

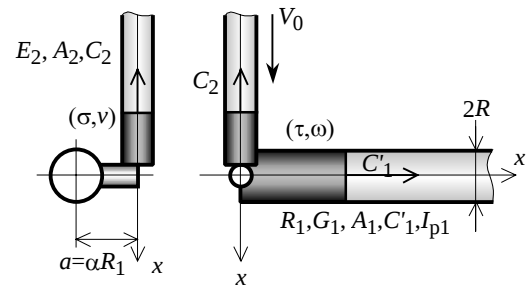
これらより

$$\tau = -\frac{1}{\alpha(1+\kappa)} \frac{V_0}{C'_1} G_1, \quad \omega = \frac{1}{1+\kappa} \frac{V_0}{l}$$

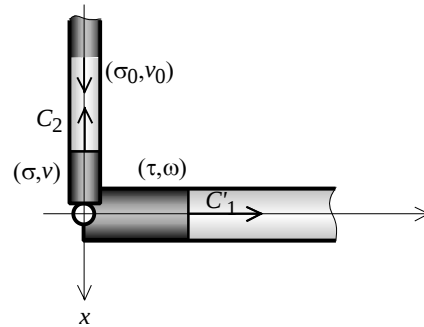
$$\sigma = -\frac{\kappa}{1+\kappa} \frac{V_0}{C_2} E_2, \quad v = -\frac{\kappa}{1+\kappa} V_0$$

$$\text{ここで, } \kappa = \frac{A_1 G_1 C'_1}{2\alpha^2 A_2 E_2 C_2}$$

となる．ここで， $R_1, A_1, I_{p1}, G_1, C'_1$  はそれぞれ横棒の半径，断面積，断面極二次モーメント，横弾性係数及びせん断波の伝ば速度． $A_2, E_2, C_2$  はそれぞれ落下棒の断面積，ヤング率及び縦波の伝ば速度， $a = \alpha R_1$  はピンの長さである．上式によれば  $\alpha$  が大きいすなわ

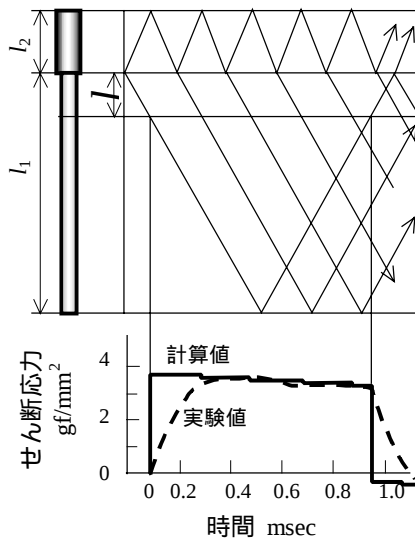


(a)ねじり応力波の発生



(b)応力波の反射透過

$R_1=12.5\text{mm}, l_1=1900\text{mm}, \alpha=2.12$   
 $R_2=20\text{mm}, l_2=540\text{mm}$   
 $V_0=3.13\text{m/sec}, l=340\text{mm}$   
 $C'_1=3170\text{m/sec}, C_2=5120\text{m/sec}$



(c)実験値との比較

図 2.6 棒にとりつけたピンの打撃によるねじり波

ちピンが長くなると発生トルクは小さくなり静的な場合とは逆である事がわかる．

次に、落下棒中を伝ばする応力波 ( $\sigma_0, v_0$ ) がピンとの接触部に達するとき、ねじり応力波 ( $\tau, \omega$ ) が横棒中に透過し、縦波 ( $\sigma, v$ ) が落下棒中を引き返すとすれば

力の釣合及び変位の条件：

$$aA_2(\sigma + \sigma_0) = \tau I_{p1} / R, \quad a\omega = v_0 + v$$

動的フックの法則：

$$\sigma_0 = -\frac{v_0}{C_2} E_2, \quad \sigma = \frac{v}{C_2} E_2, \quad \frac{\tau}{R} = -\frac{\omega}{C_1'} G$$

が成立するから、応力の反射率及び透過率はつぎのようになる。

$$\alpha_{22} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad \alpha_{21} = \frac{\tau}{\sigma_0} = \frac{4\alpha A_2}{A_1(1 + \kappa)}$$

以上の結果を用いて、縦衝撃の場合と同様に、横棒に取り付けたピンを落下棒で打撃したとき横棒に生ずるせん断応力 - 時間関係を求め実験値と比較したものが図 2.6(c)である。各棒の寸法等は図中に示すとおりである。図を見れば、実験値と計算値は良く一致しており、図式解法の有用性がわかる。

なお、同図によれば、横棒の直径の 2 倍程度の太さの打撃棒を用いれば、横棒にはほぼ長方形のねじり荷重波が発生することがわかる。

## 2. FFT法を利用した数値解法

段付き部が多い場合や不静定問題など、図式解法では手順が煩雑になり実用的ではない場合がある。そのような場合には次に示す数値ラプラス変換を利用して、波動方程式の解を直接求めた方が良い。また最近パソコンを利用できるので、この手法を骨組み構造解析に用いれば、トラスやラーメン構造の衝撃応答解析が短時間でできる。

### a. FFT法と数値ラプラス逆変換

#### ラプラス変換の基礎

はじめに、基本となるラプラス変換及び数値ラプラス逆変換について、本方法で必要となる程度の事項を記しておく。

ラプラス変換及び逆変換の定義式と、主な基本的性質は以下のとおりである。

#### ラプラス変換

$$Lap\{y(t)\} \equiv \int_0^\infty y(t)e^{-pt} dt = \tilde{y}(p) \quad (2.25)$$

#### 逆変換

$$Lap^{-1}\{\tilde{y}(p)\} \equiv \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{y}(p)e^{pt} dp \quad (2.26)$$

ただし、 $i = \sqrt{-1}$ ， $\gamma$ ：実数

#### 基本的性質

##### 1. 線形性

$$Lap\{\alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t)\} = \alpha \cdot \tilde{y}_1(p) + \beta \cdot \tilde{y}_2(p)$$

##### 2. 時間軸移動

$$Lap[y(t - \alpha) \cdot H(t - \alpha)] = e^{-\alpha p} \tilde{y}(p)$$

$$Lap[e^{\alpha t} y(t)] = \tilde{y}(p - \alpha)$$

##### 3. 時間軸拡大

$$Lap\{y(t/\alpha)\} = \alpha \tilde{y}(\alpha p), \quad \alpha > 0$$

##### 4. 畳込み

$$Lap\{y_1(t) * y_2(t)\} = \tilde{y}_1(p) \cdot \tilde{y}_2(p)$$

ただし

$$y_1(t) * y_2(t) = \int_0^t y_1(t - \tau) \cdot y_2(\tau) \cdot d\tau$$

##### 5. 初期値，最終値

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \tilde{y}(p) = y(+0)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{y}(p) = y(\infty)$$

## 6. 微分

$$\text{Lap}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = p\tilde{y}(p) - y(0)$$

$$\text{Lap}\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = p^n \tilde{y}(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} \frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{t=0}$$

## 7. 積分

$$\text{Lap}\left\{\int_0^t y(\tau) d\tau\right\} = \frac{\tilde{y}(p)}{p}$$

$$\text{Lap}\left\{\int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} y(\tau_n) d\tau_n \cdots d\tau_2 d\tau_1\right\} = \frac{\tilde{y}(p)}{p^n}$$

## 8. 簡単な関数のラプラス変換

$$\text{Lap}\{H(t)\} = 1/p \quad (\text{ステップ関数})$$

$$\text{Lap}\{\delta(t)\} = 1 \quad (\text{デルタ関数})$$

$$\text{Lap}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{p^n}$$

$$\text{Lap}\{\sin \alpha t\} = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$$

$$\text{Lap}\{\cos \alpha t\} = \frac{p}{p^2 + \alpha^2}$$

## ラプラス変換を用いた微分方程式の解法

基本的性質 6.によれば，導関数のラプラス変換は変数  $p$  との積となるから，常微分方程式は変換域では代数方程式となる．ばねの運動方程式を例にその計算手順を示す．

### 例] 運動方程式

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Ky, \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad [\text{a}]$$

基本的性質 6.より 2 階導関数のラプラス変換は

$$\text{Lap}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} = p^2 \tilde{y}(p) - py(0) - \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (2.27)$$

したがって，式[a]のラプラス変換は

$$m(p^2 \tilde{y} - py_0) = -K\tilde{y} \quad [\text{b}]$$

上式より直ちに次の解を得る．

$$\tilde{y}(p) = \frac{mpy_0}{mp^2 + K} = \frac{p}{\omega^2 + p^2} y_0 \quad [\text{c}]$$

ただし， $\omega^2 = K/m$

そして， $\tilde{y}(p)$  について逆変換

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{y}(p) e^{pt} dp \\ &= \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left\{ \frac{py_0}{\omega^2 + p^2} \right\} e^{pt} dt \end{aligned}$$

を行えば，時間域での結果が得られる．

今の場合は 8. より直ちに

$$y = y_0 \cos(\omega t) \quad [\text{d}]$$

また，初期条件が  $y(0) = 0, dy/dt|_{t=0} = V_0$

ならば運動方程式は  $m(p^2 \tilde{y} - V_0) = -K\tilde{y}$  と

なるから，変換域での解は

$$\tilde{y}(p) = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2} \frac{V_0}{\omega} \quad [\text{e}]$$

$$y = V_0 \sin(\omega t) / \omega \quad [\text{f}]$$

以上のように，変換域での解は極めて簡単に求まるので逆変換さえ可能ならばこの方法は有力な方法と言える．多くの関数についてラプラス変換，逆変換が求められており 3)，常微分方程式についてはこれらを用いれば解析的に逆変換解が得られる場合も多いと思われる．しかしながら，偏微分方程式の解法にこの手法を応用した場合変換解は複雑な関数形，あるいはいくつかの関数の組合せとなり，逆変換は容易ではない．また，逆変換が解析的に得られたとしても，級数解となることが多く最終的には数値計算にたよることになる場合が多い．

一方，FFT 法 4)による数値ラプラス逆変換法 5)は極めて簡単でしかも高速高精度な手法である．実際，はりの衝撃問題等，解析

解を数値計算するよりも高速高精度な場合が多いと思われる．そこで，これを実行するプログラムをパソコン上に作っておけば，これをツールとして用いることで，静的荷重に対する「材料力学」と同程度の解が多くの衝撃問題に対しても得られる．そこで，逆変換は数値計算にたよることとし，その方法を示す．**数値ラプラス逆変換法**

ラプラス変換のパラメタを  $p = \gamma + i2\pi\omega$  ( $\omega$  : 実数) と変数変換すれば  
 $dp = i2\pi d\omega$  ,  $\tilde{y}(p) = \tilde{y}(\gamma + i2\pi\omega) \equiv \tilde{y}(\gamma; \omega)$   
 $p = \gamma - i\infty \sim \gamma + i\infty \Rightarrow \omega = -\infty \sim \infty$  ,  
 $e^{pt} = e^{\gamma t} \cdot e^{i2\pi\omega t}$

であるから，式(2.26)は次のようになる．

$$y(t) = e^{\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{y}(\gamma; \omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega$$

この右辺の積分は  $\gamma$  をパラメタと見なせば  $\omega$  の関数  $\tilde{y}(\gamma; \omega)$  のフーリエ逆変換に他ならない．したがって，計算には高速フーリエ変換 (FFT) アルゴリズムを利用できる．FFT 法におけるデータの並び順やサンプリング定理の影響等を考慮すれば，具体的な計算手順は以下ようになる．

#### 数値ラプラス逆変換の手順

- [1] 解が必要な時間幅  $T$   
 と計算点数  $N$

を決める．

$N$  は2のべき乗とする． $N$  が大きいほど細かい結果が得られ計算精度もよくなる． $1/T$  は  $\omega$  の刻みすなわち周波数の分解能となるから， $T$  を小さくすると詳細な結果が得られない場合がある．

- [2]  $\gamma$  の値を決める．

一般に  $\gamma$  を大きくすれば，精度はよくなると考えられるが，後で  $e^{\gamma t}$  をかけるので  $t$  が大きいところで解が発散することがある． $\gamma = 3/T \sim 7/T$  が適当である．

- [3]  $p = \gamma + i \frac{2\pi k}{T}$  ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  (2.28)

と置き，次のデータ列をFFT法計算プロ

グラムのデータ配列に順次格納する．

$$k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad \text{までは}$$

$$\tilde{y}_k = \frac{N}{T} \tilde{y}\left(\gamma + \frac{i2\pi k}{T}\right) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (2.29)$$

$$k = \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \quad \text{では}$$

$$\tilde{y}_k = \overline{\tilde{y}_{N-k}} \quad (2.30)$$

ここで， $\overline{\tilde{y}_{N-k}}$  は  $\tilde{y}_{N-k}$  の共役複素数

なお， $\{1 + \cos(2\pi k/N)\}/2$  はハニング関数でありこれをかけることによって計算精度が向上する6)．

また，時間域で実数となる関数は複素数域では実部は偶関数，虚部は奇関数となるので実際の関数計算は  $N/2$  個でよい．

- [4] FFT逆変換プログラムを実行する．  
 普通FFT法の計算プログラムでは，[3]で計算した  $\tilde{y}_k$  を順に格納した配列と同じ配列に時間域での値が時刻

$$t = kT/N \quad , k = 0, 1, \dots, N-1$$

の順に得られる．これを  $y'_k$  とする．

- [5] [4]で得られた結果  $y'_k$  に  $e^{\gamma t}$  をかける．

$$y_k = y'_k \cdot e^{\gamma kT/N} \quad , k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.31)$$

$$y_k \approx y(kT/N) \text{ となり，時間域での結果が得られる．}$$

章末に，本文で用いたプログラムリストを示す．計算手順を理解する参考にされたい．

#### b．棒の縦衝撃

縦衝撃を受ける棒の波動方程式 (2.1)のラプラス変換域における一般解は次式となる．

変位：

$$\tilde{u}(p, x) = \alpha_1 e^{-px/C} + \alpha_2 e^{px/C} \quad (2.32)$$

変位速度：

$$\tilde{v}(p, x) = p(\alpha_1 e^{-px/C} + \alpha_2 e^{px/C}) \quad (2.33)$$

応力：

$$\tilde{\sigma}(p, x) = -\frac{Ep}{C}(\alpha_1 e^{-px/C} - \alpha_2 e^{px/C}) \quad (2.34)$$

種々の衝撃荷重に対する解はこれらの式を用いて、境界条件を満足するように未知係数  $\alpha_1, \alpha_2$  を決定することに帰着される。

変位の波動方程式  $\partial^2 u / \partial t^2 = C^2 \partial^2 u / \partial x^2$  を初期条件  $u(0, x) = 0$  ,  $\partial u(t, x) / \partial t|_{t=0} = 0$  の下でラプラス変換すれば  $p^2 \tilde{u} = C^2 d^2 \tilde{u} / dx^2$  となり、一般解は  $\tilde{u} = \alpha_1 \exp(-px/C) + \alpha_2 \exp(px/C)$  である。そして、変位速度は  $\tilde{v} = p\tilde{u}$  , 応力は  $\tilde{\sigma} = E d\tilde{u} / dx$  である。

[例 1] 一端にステップ状衝撃速度を受ける他端自由棒

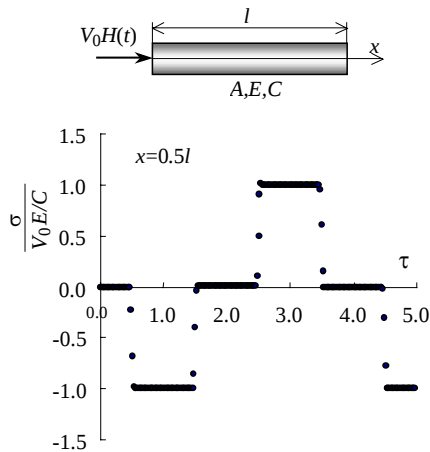


図 2.7 ステップ状荷重を受ける棒の応力

境界条件  $v(t, 0) = V_0 H(t)$  ,  $\sigma(t, l) = 0$  より

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{V_0}{p^2}$$

$$\alpha_1 e^{-pl/C} - \alpha_2 e^{pl/C} = 0 \quad [a]$$

$$\alpha_1 = \frac{e^{pl/C}}{e^{pl/C} + e^{-pl/C}} \cdot \frac{V_0}{p^2} ,$$

$$\alpha_2 = \frac{e^{-2pl/C}}{e^{pl/C} + e^{-pl/C}} \cdot \frac{V_0}{p^2} \quad [b]$$

応力の解は

$$\begin{aligned} -\frac{\tilde{\sigma}(p, x)}{V_0 E / C} &= \frac{1}{p} \frac{e^{p(l-x)/C} - e^{-p(l-x)/C}}{e^{pl/C} + e^{-pl/C}} \\ &= \frac{\sinh(p(l-x)/C)}{p \cosh(pl/C)} \quad [c] \end{aligned}$$

ラプラス変換の性質 3.によれば  $t$  に関する変換解  $\tilde{y}(p)$  において、全体に  $C/l$  をかけ  $p(l/C)$  を  $p$  と書き直したものは  $\tau = Ct/l$  に関するラプラス変換解に等しいから、無次元時間  $\tau = Ct/l$  に関する変換解は

$$-\frac{\tilde{\sigma}(p, x)}{V_0 E / C} = \frac{\sinh(p(1-x/l))}{p \cosh(p)} \quad [d]$$

となる。

図の計算値は  $x/l = 0.5$  として式[d]を数値逆変換した結果で、計算点数は 256 点である。計算値はほぼステップ状であり、応力波が右端で自由端反射、衝撃端で固定端反射する事がわかる。

例 2] 質量  $M$  の剛体が速度  $V_0$  で衝突する他端固定棒

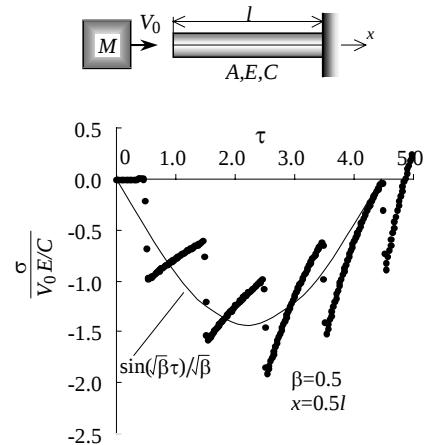


図 2.8 剛体衝突による棒の応力

剛体の変位を  $U$  とすれば，運動方程式は

$$M \frac{d^2 U}{dt^2} = A\sigma(t,0), \quad U=0, \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} = V_0$$

————[a]

ラプラス変換は

$$M \{ p^2 \tilde{U} - V_0 \} = A \tilde{\sigma}(p,0) \quad [b]$$

一方棒の変位と応力より

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U} &\equiv \tilde{u}(p,0) = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \tilde{\sigma}(p,0) &= -\frac{E p}{C} (\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad [c]$$

$$M \{ p^2 (\alpha_1 + \alpha_2) - V_0 \} = -\frac{AE p}{C} (\alpha_1 - \alpha_2)$$

————[d]

棒右端の変位は 0 であるから

$$\alpha_1 e^{-pl/C} + \alpha_2 e^{pl/C} = 0 \quad [e]$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{l}{C} \frac{e^{pl/C}}{\frac{pl}{C} \sinh(pl/C) + \beta \cosh(-pl/C)} \cdot \frac{V_0}{2p} \\ \alpha_2 &= \frac{l}{C} \frac{e^{-pl/C}}{\frac{pl}{C} \sinh(pl/C) + \beta \cosh(-pl/C)} \cdot \frac{V_0}{2p} \end{aligned} \right\} \quad [f]$$

$$\text{ただし, } \beta = Al\rho/M \quad [g]$$

応力は

$$-\frac{\tilde{\sigma}(p,x)}{V_0 E/C} = \frac{l}{C} \frac{\cosh(p(l-x)/C)}{\frac{pl}{C} \sinh(pl/C) + \beta \cosh(pl/C)}$$

————[h]

無次元化時間  $\tau = Ct/l$  に関する解は

$$-\frac{\tilde{\sigma}(p,x)}{V_0 E/C} = \frac{\cosh(p(1-x/l))}{p \sinh(p) + \beta \cosh(p)} \quad [i]$$

なお， 1 で示したように，これをばね質量系とみなしたときの解は

$$\frac{\sigma_b}{V_0 E/C} = -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \sin(\sqrt{\beta} \tau) \quad [j]$$

となり図中細線はこれを示す．

図を見れば，応力波伝ばを考慮した解はばね質量系の解を中心とした鋸刃状と

なり，ばね質量系の解に対して高々  $\sigma_0$ （ここで， $\sigma_0 = V_0 E/C$ ）程度大きくなると考えられる．一方ばね質量系の解の最大値は  $\sigma_0 / \sqrt{\beta}$  であるから，このときの応力波伝ばによる応力の増加は  $\sqrt{\beta}$  の程度であり， $\beta = 0.1$  ならば 32%， $\beta = 0.01$  ならば 10%程度である．

なお，この問題については応力波の伝ばを追跡し漸化式として解を得たものもあるが 7)，本方法の簡便さがわかるであろう．

### 不静定問題

以上は静定問題であるが，不静定問題も同様に解ける．以下に例題を示す．

**【例 3】** 段付き部にステップ状の衝撃荷重を受ける両端固定段付棒

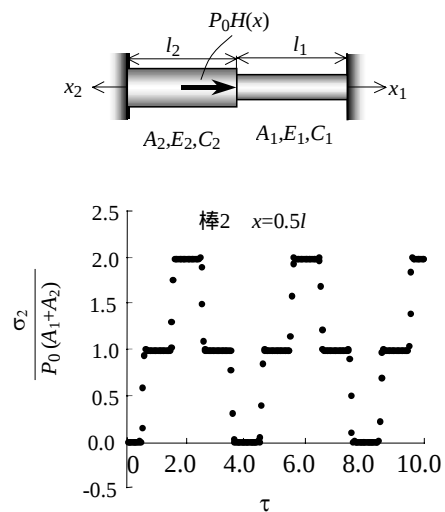


図 2.9 両端固定段付棒

棒 1, 2 について座標系を図のようにとる．荷重点の力の釣合，変位の条件は

$$\left. \begin{aligned} P_0 H(t) + A_1 \sigma_1(t,0) &= A_2 \sigma_2(t,0) \\ u_1(t,0) &= -u_2(t,0) \end{aligned} \right\} \quad [a]$$

棒の左右端は固定されているから

$$u_1(t, l_1) = u_2(t, l_2) = 0 \quad [b]$$

棒 1, 2 のラプラス変換解をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \alpha_{11} e^{-px_1/C_1} + \alpha_{12} e^{px_1/C_1} \\ \tilde{u}_2 &= \alpha_{21} e^{-px_2/C_2} + \alpha_{22} e^{px_2/C_2} \end{aligned} \right\} [c]$$

とおけば,

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1 E_1}{C_1} (\alpha_{11} - \alpha_{12}) - \frac{A_2 E_2}{C_2} (\alpha_{21} - \alpha_{22}) &= -\frac{P_0}{p^2} \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{21} + \alpha_{22} &= 0 \\ \alpha_{11} e^{-pl_1/C_1} + \alpha_{12} e^{pl_1/C_1} &= 0 \\ \alpha_{21} e^{-pl_2/C_2} + \alpha_{22} e^{pl_2/C_2} &= 0 \end{aligned} \right\} [d]$$

これを解けば  $\alpha_{11} \sim \alpha_{21}$  が得られる.

$C_1 = C_2 = C$ ,  $E_1 = E_2 = E$ ,  $l_1 = l_2 = l$  ならば,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= -\frac{P_0 C}{(A_1 + A_2) p^2 E} \cdot \frac{1}{1 + e^{-2pl/C}} = -\alpha_{21} \\ \alpha_{12} &= \frac{P_0 C}{(A_1 + A_2) p^2 E} \cdot \frac{e^{-2pl/C}}{1 + e^{-2pl/C}} = -\alpha_{22} \end{aligned} \right\} [e]$$

棒 1, 2 の応力は

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\sigma}_1(p, x)}{P_0/(A_1 + A_2)} &= -\frac{\tilde{\sigma}_2(p, x)}{P_0/(A_1 + A_2)} \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{e^{-\frac{px}{C}}}{1 + e^{-\frac{2pl}{C}}} \left\{ 1 + e^{-2p(l-x)/C} \right\} \end{aligned} [f]$$

$\tau = Ct/l$  に対する解は

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\sigma}_1(p, x)}{P_0/(A_1 + A_2)} &= -\frac{\tilde{\sigma}_2(p, x)}{P_0/(A_1 + A_2)} \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{e^{-px/l}}{1 + e^{-2p}} \cdot \left\{ 1 + e^{-2p(1-x/l)} \right\} \end{aligned} [g]$$

#### [例 4] 不静定トラス (同径同質部材)

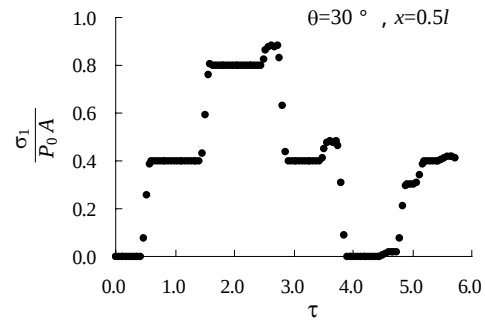
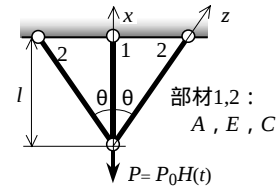


図 2.10 不静定トラス

部材 1 について, 変位, 荷重点に及ぼす力, 荷重点の変位をそれぞれ

$$\tilde{u}_1(p, x) = \alpha_{11} e^{-px/C} + \alpha_{12} e^{px/C}$$

$$Q_1, U_1 \quad [a]$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= -\frac{A E p}{C \tanh(pl/C)} \tilde{U}_1 \\ \alpha_{11} &= \frac{e^{pl/C}}{2 \sinh(pl/C)} \tilde{U}_1 \\ \alpha_{12} &= -\frac{e^{-pl/C}}{2 \sinh(pl/C)} \tilde{U}_1 \end{aligned} \right\} [b]$$

$$\tilde{U}_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12}, \quad \alpha_{11} e^{-\frac{pl}{C}} + \alpha_{12} e^{\frac{pl}{C}} = 0$$

$$\tilde{Q}_1 = -A E p (\alpha_{11} - \alpha_{12}) / C \quad \text{より}$$

同様に部材 2 についてこれらを,

$$\tilde{u}_2(p, z) = \alpha_{21} e^{-pz/C} + \alpha_{22} e^{pz/C}$$

$$Q_2, U_2 \quad [c]$$

と置いて

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_2 &= -\frac{AEp}{C \tanh(pl/C \cos \theta)} \tilde{U}_2 \\ \alpha_{21} &= \frac{e^{pl/C \cos \theta}}{2 \sinh(pl/C \cos \theta)} \tilde{U}_2 \\ \alpha_{22} &= -\frac{e^{-pl/C \cos \theta}}{2 \sinh(pl/C \cos \theta)} \tilde{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad [d]$$

$$Q_1 + 2Q_2 \cos \theta = P, \quad U_1 \cos \theta = U_2 \text{ より}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_1 K_1 + 2\tilde{U}_2 K_2 \cos \theta &= \frac{P_0}{p} \\ \tilde{U}_1 \cos \theta &= \tilde{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad [e]$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= -\frac{AEp}{C} \left( \tanh \frac{pl}{C} \right)^{-1} \\ K_2 &= -\frac{AEp}{C} \left( \tanh \frac{pl}{C \cos \theta} \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad [f]$$

[e]を解けば

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_1 &= \frac{P_0}{p} \cdot \frac{1}{K_1 + 2K_2 \cos^2 \theta} \\ \tilde{U}_2 &= \frac{P_0}{p} \cdot \frac{\cos \theta}{K_1 + 2K_2 \cos^2 \theta} \end{aligned} \right\} \quad [g]$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{P_0}{p} \cdot \frac{1}{K_1 + 2K_2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{e^{\frac{pl}{C}}}{2 \sinh \frac{pl}{C}} \\ \alpha_{12} &= -\frac{P_0}{p} \cdot \frac{1}{K_1 + 2K_2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{e^{-\frac{pl}{C}}}{2 \sinh \frac{pl}{C}} \end{aligned} \right\} \quad \text{—————h]}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{21} &= \frac{P_0}{p} \cdot \frac{\cos \theta}{K_1 + 2K_2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{e^{\frac{pl}{C \cos \theta}}}{2 \sinh \frac{pl}{C \cos \theta}} \\ \alpha_{22} &= -\frac{P_0}{p} \cdot \frac{\cos \theta}{K_1 + 2K_2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{e^{-\frac{pl}{C \cos \theta}}}{2 \sinh \frac{pl}{C \cos \theta}} \end{aligned} \right\} \quad \text{—————[i]}$$

$\tau = Ct/l$  に対する部材 1 の応力は

$$\frac{\tilde{\sigma}_1(p, x)}{P_0/A} = \frac{\tanh \frac{p}{\cos \theta} \tanh p}{\tanh \frac{p}{\cos \theta} + 2 \cos \theta \tanh p} \times \frac{\cosh p(l-x)}{p \sinh p} \quad [k]$$

### c . 棒のねじり衝撃

棒のねじりについては, 前出の変数の置換えを行えば, 縦衝撃の場合と全く同様であるのでここでは省略する.

### d . はりの曲げ衝撃

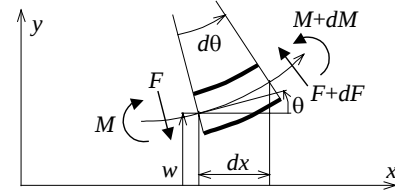


図 2.11 はりのたわみ

たわみ  $w$ , たわみ角  $\theta$ , 曲げモーメント  $M$ , せん断力  $F$  を図 2.11 のように定義するとき, たわみに関するオイラーの運動方程式は次式となる.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (2.35)$$

ただし, 単純曲げを仮定しているので, たわみとたわみ角, 曲げモーメント, せん断力の関係は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{\partial w}{\partial x}, \quad M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad F = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \sigma &= -My/I \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

$$\text{ここで, } c_b = \sqrt{EI/\rho A} \quad (2.37)$$

$I$ : 断面二次モーメント

これらのラプラス変換域での解は,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}(p, x) &= \sum_{k=1}^4 \alpha_k e^{\eta_k x} \\ \tilde{\theta}(p, x) &= \sum_{k=1}^4 \alpha_k \eta_k e^{\eta_k x} \\ \tilde{M}(p, x) &= EI \sum_{k=1}^4 \alpha_k \eta_k^2 e^{\eta_k x} \\ \tilde{F}(p, x) &= -EI \sum_{k=1}^4 \alpha_k \eta_k^3 e^{\eta_k x} \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

ただし，

$$-\frac{p^2}{c_b} = R \cdot e^{-i\phi}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad \text{として}$$

$$\eta_k = \sqrt[4]{R} \exp\left\{i \frac{\phi + 2\pi(k-1)}{4}\right\} \quad (2.39)$$

$k = 1, 2, 3, 4$

はりの問題は，これらの式より境界条件を満たす未知係数  $\alpha_1 \sim \alpha_4$  を決定することに帰着する．

[例 5] 先端にステップ状集中荷重を受ける片持ちはり

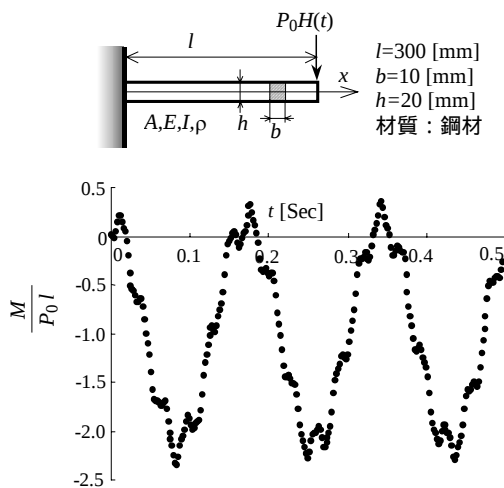


図 2.12 衝撃荷重を受ける片持ちはり

境界条件は

$$w(t, 0) = 0, \quad \theta(t, 0) = 0, \quad M(t, l) = 0, \quad F(t, l) = -P_0 H(t)$$

であるから  $\alpha_k$  は次の連立方程式の解である．

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b} \quad [\text{a}]$$

ここで，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \eta_1^2 \exp(\eta_1 l) & \eta_2^2 \exp(\eta_2 l) & \eta_3^2 \exp(\eta_3 l) & \eta_4^2 \exp(\eta_4 l) \\ -\eta_1^3 \exp(\eta_1 l) & -\eta_2^3 \exp(\eta_2 l) & -\eta_3^3 \exp(\eta_3 l) & -\eta_4^3 \exp(\eta_4 l) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4)^T$$

$$\mathbf{b} = -\frac{P_0}{EI} \cdot \frac{1}{p} (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T$$

図 2.12 は，式[a]の連立方程式の解も数値的に得たものである．問題が複雑になる場合は，このように連立方程式の解も数値的に行えば計算ミスも防げ便利であり，計算時間はやや長くなるが解の精度はほとんど同じである．

### 3．動的剛性マトリクスと骨組み構造解析

前節で棒の引張圧縮，曲げの問題についてラプラス変換域での解を示した．棒の数が少ない場合は，これに境界条件を与え直接解を導き逆変換ルーチンにかけることで時間域での解を得ることが出来る．しかしながら，部材の数が多くなるとこれを直接解くことはかなり面倒になる．そのような場合には，有限要素法（骨組み構造解析の）の手法を利用するのが便利である．そこで，以下では骨組要素のラプラス変換域における剛性マトリクスを以下に示す．

#### a．トラス

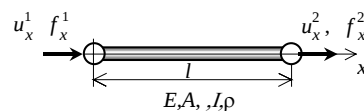


図 2.13 トラス部材の接点変位，節点力

図 2.13 のようにトラス部材の左端及び右端の節点変位ベクトルを  $\mathbf{u} = (u_x^1, u_x^2)^T$  節点力ベクトルを  $\mathbf{F} = (f_x^1, f_x^2)^T$  とすれば、縦衝撃を受ける棒の解より

$$u_x^1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad u_x^2 = \alpha_1 e^{-pl/C} + \alpha_2 e^{pl/C} \quad [a]$$

(以下では、ラプラス変換域の値  $\tilde{\phi}$  であっても単に  $\phi$  と記し、記号 $\sim$ は省略する)

応力と節点力の関係は

$$f_x^1 = -A\sigma_{x=0}, \quad f_x^2 = A\sigma_{x=l} \quad \text{であるから,}$$

$$\left. \begin{aligned} f_x^1 &= \frac{AEp}{C}(\alpha_1 - \alpha_2) \\ f_x^2 &= -\frac{AEp}{C}(\alpha_1 e^{-pl/C} - \alpha_2 e^{pl/C}) \end{aligned} \right\} \quad [b]$$

[a]より  $\alpha_1, \alpha_2$  を求め、[b]に代入すれば、次式を得る。

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_{11}^T & k_{12}^T \\ k_{21}^T & k_{22}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし, } a &= \frac{AEp}{C} \cdot \frac{\cosh(pl/C)}{\sinh(pl/C)} \\ b &= -\frac{AEp}{C} \cdot \frac{1}{\sinh(pl/C)} \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

$\mathbf{k}$  はラプラス変換域における要素の動的剛性マトリクスである。

## b. ラーメン

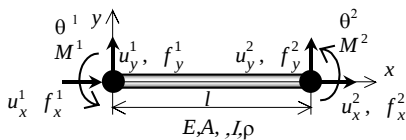


図 2.14 ラーメン部材の接点変位、節点力

曲げ変形のみを考え、節点変位ベクトル (たわみと、たわみ角)  $\mathbf{u} = (u_y^1, \theta^1, u_y^2, \theta^2)^T$ 、と節点力ベクトル (せん断力と曲げモーメント)

ト)  $\mathbf{F} = (f_y^1, M^1, f_y^2, M^2)^T$  を図のようにとりたわみの解を

$$\begin{aligned} u_y &= \sum_{k=1}^4 \alpha_k \exp(\eta_k x) \quad \text{と置けば} \\ u_y^1 &= \sum_{k=1}^4 \alpha_k, \quad \theta^1 = \sum_{k=1}^4 \alpha_k \eta_k \\ M^1 &= -EI \sum_{k=1}^4 \alpha_k \eta_k^2, \quad f_y^1 = EI \sum_{k=1}^4 \alpha_k \eta_k^3 \\ u_y^2 &= \sum_{k=1}^4 \alpha_k e^{\eta_k l}, \quad \theta^2 = \sum_{k=1}^4 \alpha_k \eta_k e^{\eta_k l} \\ M^2 &= EI \sum_{k=1}^4 \alpha_k \eta_k^2 e^{\eta_k l}, \\ f_y^2 &= -EI \sum_{k=1}^4 \alpha_k \eta_k^3 e^{\eta_k l} \end{aligned}$$

であるから、要素の曲げ成分に関する剛性マトリクス  $\mathbf{k}^B$  は次のようになる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}^B \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{k}^B = \begin{pmatrix} k_{11}^B & k_{12}^B & k_{13}^B & k_{14}^B \\ k_{21}^B & k_{22}^B & k_{23}^B & k_{24}^B \\ k_{31}^B & k_{32}^B & k_{33}^B & k_{34}^B \\ k_{41}^B & k_{42}^B & k_{43}^B & k_{44}^B \end{pmatrix} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad (2.42)$$

ここで、

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ e^{\eta_1 l} & e^{\eta_2 l} & e^{\eta_3 l} & e^{\eta_4 l} \\ \eta_1 e^{\eta_1 l} & \eta_2 e^{\eta_2 l} & \eta_3 e^{\eta_3 l} & \eta_4 e^{\eta_4 l} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{D} = EI \begin{pmatrix} \eta_1^3 & \eta_2^3 & \eta_3^3 & \eta_4^3 \\ -\eta_1^2 & -\eta_2^2 & -\eta_3^2 & -\eta_4^2 \\ -\eta_1^3 e^{\eta_1 l} & -\eta_2^3 e^{\eta_2 l} & -\eta_3^3 e^{\eta_3 l} & -\eta_4^3 e^{\eta_4 l} \\ \eta_1^2 e^{\eta_1 l} & \eta_2^2 e^{\eta_2 l} & \eta_3^2 e^{\eta_3 l} & \eta_4^2 e^{\eta_4 l} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

これに軸力が加わるから、結局、ラーメン要素の剛性マトリクスは次のようになる。

$$\mathbf{u} = (u_x^1, u_y^1, \theta^1, u_x^2, u_y^2, \theta^2)^T$$

$$\mathbf{F} = (f_x^1, f_y^1, M^1, f_x^2, f_y^2, M^2)^T \quad \text{と} \quad \text{おいて}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{k} = (k_{ij}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^B & k_{12}^B & 0 & k_{13}^B & k_{14}^B \\ 0 & k_{21}^B & k_{22}^B & 0 & k_{23}^B & k_{24}^B \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & k_{31}^B & k_{32}^B & 0 & k_{33}^B & k_{34}^B \\ 0 & k_{41}^B & k_{42}^B & 0 & k_{43}^B & k_{44}^B \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

### c . トラスとラーメンの混合構造

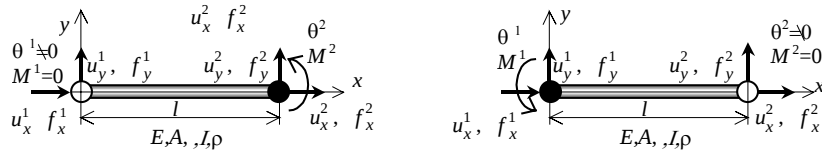


図 2.15 1 端回転自由部材の接点変位，節点力

図 2.15 のようなトラスとラーメンの混合構造の剛性マトリクスは以下ようになる．左端回転自由の場合，要素の節点力，節点変位関係は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} f_x^1 \\ f_y^1 \\ 0 \\ f_x^2 \\ f_y^2 \\ M^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^b & k_{12}^b & 0 & k_{13}^b & k_{14}^b \\ 0 & k_{21}^b & k_{22}^b & 0 & k_{23}^b & k_{24}^b \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & k_{31}^b & k_{32}^b & 0 & k_{33}^b & k_{34}^b \\ 0 & k_{41}^b & k_{42}^b & 0 & k_{43}^b & k_{44}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ \theta^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \quad [a]$$

3行目より， $\theta^1 = -(u_y^1 k_{21}^b + u^2 k_{23}^b + \theta^2 k_{24}^b) / k_{22}^b$  であるから， $\theta^1$  を消去し次のように書ける

$$\begin{pmatrix} f_x^1 \\ f_y^1 \\ M^1 \\ f_x^2 \\ f_y^2 \\ M^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^b - k_{12}^b k_{21}^b / k_{22}^b & 0 & 0 & k_{13}^b - k_{12}^b k_{23}^b / k_{22}^b & k_{14}^b - k_{12}^b k_{24}^b / k_{22}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & k_{31}^b - k_{32}^b k_{21}^b / k_{22}^b & 0 & 0 & k_{33}^b - k_{32}^b k_{23}^b / k_{22}^b & k_{34}^b - k_{32}^b k_{24}^b / k_{22}^b \\ 0 & k_{41}^b - k_{42}^b k_{21}^b / k_{22}^b & 0 & 0 & k_{43}^b - k_{42}^b k_{23}^b / k_{22}^b & k_{44}^b - k_{42}^b k_{24}^b / k_{22}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ \theta^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \quad [b]$$

要素の剛性マトリクスは

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^b - k_{12}^b k_{21}^b / k_{22}^b & 0 & 0 & k_{13}^b - k_{12}^b k_{23}^b / k_{22}^b & k_{14}^b - k_{12}^b k_{24}^b / k_{22}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & k_{31}^b - k_{32}^b k_{21}^b / k_{22}^b & 0 & 0 & k_{33}^b - k_{32}^b k_{23}^b / k_{22}^b & k_{34}^b - k_{32}^b k_{24}^b / k_{22}^b \\ 0 & k_{41}^b - k_{42}^b k_{21}^b / k_{22}^b & 0 & 0 & k_{43}^b - k_{42}^b k_{23}^b / k_{22}^b & k_{44}^b - k_{42}^b k_{24}^b / k_{22}^b \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

である．

同様に，右端が回転自由の場合は  $\theta^2 = -(u_y^1 k_{41}^b + \theta^1 k_{42}^b + u^2 k_{43}^b) / k_{44}^b$  より

$$\mathbf{k} = (k_{ij}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^b - k_{14}^b k_{41}^b / k_{44}^b & k_{12}^b - k_{14}^b k_{42}^b / k_{44}^b & 0 & k_{13}^b - k_{14}^b k_{43}^b / k_{44}^b & 0 \\ 0 & k_{21}^b - k_{24}^b k_{41}^b / k_{44}^b & k_{22}^b - k_{24}^b k_{42}^b / k_{44}^b & 0 & k_{23}^b - k_{24}^b k_{43}^b / k_{44}^b & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & k_{31}^b - k_{34}^b k_{41}^b / k_{44}^b & k_{32}^b - k_{34}^b k_{42}^b / k_{44}^b & 0 & k_{33}^b - k_{34}^b k_{43}^b / k_{44}^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

以上のように要素の剛性マトリクスが得られれば，静的な有限要素法と同じ手順で数値ラプラス逆変換法の手順 3) で決定される  $p$  の値毎に有限要素法の解をデータ点数  $N$  だけ求め，これらを FFT 逆変換ルーチンにかければ時間域での解が得られる．なお，この方法は骨組み構造解析に限らず，平板等の動的有限要素法や境界要素法にも有効であることが示されている 8)~10) ．

門形フレームに丸棒が衝突する問題の計算と実験値を比較した結果を図 2.5 に示す．これは，打撃点に単位の大さのステップ状荷重  $H(t)$  が加わる時の打撃点の曲げモーメントの解  $M_H(t)$  を求め，これと打撃棒下端に貼付したひずみゲージによって測定された打撃力  $f(t)$  との次のデュアメル積分

$$M(t) = f(0) \cdot M_H(t) + \int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} \cdot M_H(t - \tau) d\tau \quad (2.48)$$

によって解  $M(t)$  を求めたものである．ひずみゲージによる測定値と計算値は良く一致している事がわかる．また，縦波の影響はほとんど無く計算時間を短縮するためにこれを省略しても良いことが判る．

なお，このように衝撃問題ではステップ関数に対する解を求めておけば，任意関数に対する解は上のデュアメル積分によって得られる事を付記して置く．

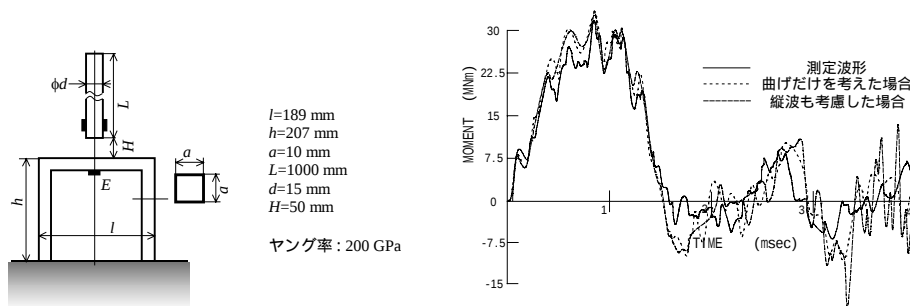


図 2.16 中央に衝撃をうける門形フレーム荷重点直下  $E$  点の曲げモーメント

## 参考文献

- 1) 松本浩之ほか：機械学会論文集, 30, 215(1964), 759.
- 2) 茶谷・放生：機械学会論文集, 44, 381(1978), 1445.
- 3) F.Oberhettinger, L.Badii Tables of Laplace Transforms, Springer-Verlag, (1974)
- 4) E.Oran Brigham, 宮川，今井訳「高速フーリエ変換」科学技術出版社, (1979)

- 5)W.Krings,H.Waller,:Int.Num.Mech.Eng., 14(1979), 1183.  
 6)放生ほか：機械学会論文集, 63, 616(1997), 2526.  
 7)前川一郎：機械学会誌, 84, 750(1981), 448.  
 8)松本浩之ほか：機械学会論文集, 54, 501A(1988), 1024.  
 9)足立忠晴ほか：機械学会論文集, 56, 524A(1990), 917.  
 10)松本浩之ほか：機械学会論文集, 59, 556A(1993), 2362.

## ビジュアルベーシック言語によるプログラム例

本文の例題を逆変換するために用いたプログラム中，逆ラプラス変換，逆変換データ作成及びFFT計算のためのサブルーチンのプログラムリストを以下に掲載する．使用言語はマイクロソフト社ビジュアルベーシックである．

### ○逆ラプラス変換サブルーチン

```
Sub InvLapSub(Gamma0 As Double, T0 As Double, n As Integer, Y() As Double)
'*****
' Gamma0=y × T, T0=T, n=N, Y():逆変換結果を記憶し持帰る配列
' このサブルーチンで作製使用する配列
' FFTDataArray():FFTサブルーチンで使用する
' cst():FFTサブルーチンで使用するコサイン表を記憶する
'*****
Dim k As Integer
Dim r As Double
Dim cst() As Double
Dim FFTDataArray() As ComplexDb1
ReDim FFTDataArray(n - 1)
ReDim cst(n / 4)
SetInvLapDataSub Gamma0, T0, n, FFTDataArray()
r = 2 * PAI / n
For k = 0 To n / 4
    cst(k) = Cos(k * r)
Next
FFTInvSub n, FFTDataArray(), cst()
r = Gamma0 / n
For k = 0 To n - 1
    Y(k) = FFTDataArray(k).x * Exp(r * k)
Next
Erase FFTDataArray, cst
End Sub
```

'注1)  
'計算時に使用する配列を作製  
'FFT用の配列に関数値を準備する  
'コサイン表作製  
'FFT逆変換ルーチン呼出し  
'exp(yt)をかける  
'結果は実部のみを採用すればよい  
'不要になった配列を消去

### ○逆変換データ作成サブルーチン

```
Sub SetInvLapDataSub(Gamma0 As Double, T0 As Double, n As Integer,
    FFTDataArray() As ComplexDb1)
'*****
' Gamma0=y × T, T0=T, n=N, FFTDataArray():FFTサブルーチンで使用する配列
'*****
Dim p As ComplexDb1, fvalue As ComplexDb1
Dim Hw As Double, Hw2 As Double
Dim k As Integer, k2 As Integer
p.x = Gamma0 / T0
For k = 0 To n / 2
    k2 = n - k
    Hw = 0.5 * (Cos(k * PAI * 2 / n) + 1#)
    p.Y = 2 * k * PAI / T0
    fvalue = Laplacefunction(p)
    FFTDataArray(k).x = n / T0 * Hw * fvalue.x
    FFTDataArray(k).Y = n / T0 * Hw * fvalue.Y
    If k <> 0 And k <> n / 2 Then
        FFTDataArray(k2).x = FFTDataArray(k).x
        FFTDataArray(k2).Y = -FFTDataArray(k).Y
    End If
Next
End Sub
```

'逆変換したい関数の計算 注2)  
'共役複素数

○ FFT サブルーチン

```

Sub FFTSub(NW As Integer, x() As ComplexDb1, cst() As Double)
'*****
'* x(0~nw-1) を FFT する
'* Cst(i)=cos(2pai/nw*i)[i=0~nw/4]: コサイン表
'*****
Dim n1 As Integer, n2 As Integer, n3 As Integer, StageNo As Integer
Dim ButterflyNo As Integer, GroupNo As Integer, Stage As Integer
Dim Group As Integer, Butterfly As Integer
Dim i As Integer, j As Integer, j1 As Integer, k As Integer
Dim DataIndex As Integer, TableIndex As Integer, iw As Integer
Dim wc As ComplexDb1, Wt As ComplexDb1
    n1 = NW \ 4
    n2 = n1 * 2: n3 = n1 * 3
    StageNo = Log(NW) / Log(2)
    ButterflyNo = NW
    GroupNo = 1
    For Stage = 1 To StageNo
        ButterflyNo = ButterflyNo / 2
        DataIndex = 0
        For Group = 1 To GroupNo
            TableIndex = 0
            For Butterfly = 0 To ButterflyNo - 1
                i = DataIndex + Butterfly
                j = DataIndex + Butterfly + ButterflyNo
                GoSub CalcuButterfly
                TableIndex = TableIndex + GroupNo
            Next
            DataIndex = DataIndex + 2 * ButterflyNo
        Next
        GroupNo = 2 * GroupNo
    Next
'ビット反転
    For i = 1 To NW - 1
        j = 0: k = i: j1 = NW / 2
        Do While k > 0
            j = j + (k Mod 2) * j1
            k = k \ 2
            j1 = j1 \ 2
        Loop
        If j > i Then
            wc = x(i): x(i) = x(j): x(j) = wc
        End If
    Next
Exit Sub
CalcuButterfly:
    If TableIndex < n1 Then
        Wt.x = cst(TableIndex)
        Wt.y = -cst(n1 - TableIndex)
    ElseIf TableIndex < n2 Then
        iw = TableIndex - n1
        Wt.x = -cst(n1 - iw)
        Wt.y = -cst(iw)
    ElseIf TableIndex < n3 Then
        iw = TableIndex - n2
        Wt.x = -cst(iw)
        Wt.y = -cst(iw)
    Else
        iw = TableIndex - n3
        Wt.x = cst(n1 - iw)
        Wt.y = cst(iw)
    End If
    wc = ComplexSub(x(i), x(j))
    x(i) = ComplexAdd(x(i), x(j))
    x(j) = ComplexMul(wc, Wt)
    Return
End Sub

```

○ 逆 FFT サブルーチン

```
Sub FFTInvSub(NW As Integer, x() As ComplexDb1, cst() As Double)
'*****
'* x(0~nw-1) を 逆FFT する
'*
'* cst(i)=cos(2pai/nw*i)[i=0~nw/4]: コサイン表
'*****
Dim r As Double
Dim wc As ComplexDb1
Dim k As Integer
  FFTSub NW, x(), cst()
  r = 1# / NW
  For k = 0 To NW - 1
    x(k).x = r * x(k).x
    x(k).y = r * x(k).y
  Next
  For k = 1 To NW / 2 - 1
    wc = x(k)
    x(k) = x(NW - k)
    x(NW - k) = wc
  Next
End Sub
```

○ 複素数の演算例

```
' a+b 足し算
Function ComplexAdd(a as ComplexDb1, b as ComplexDb1) as ComplexDb1
  ComplexAdd.x = a.x + b.x
  ComplexAdd.y = a.y + b.y
End Function
' a-b 引き算
Function ComplexSub(a as ComplexDb1, b as ComplexDb1) as ComplexDb1
  ComplexSub.x = a.x - b.x
  ComplexSub.y = a.y - b.y
End Function
' a×b かけ算
Function ComplexMul(a as ComplexDb1, b as ComplexDb1) as ComplexDb1
  ComplexMul.x = a.x * b.x - a.y * b.y
  ComplexMul.y = a.x * b.y + a.y * b.x
End Function
' a/b 割り算
Function ComplexDiv(a as ComplexDb1, b as ComplexDb1) as ComplexDb1
On Error Resume Next
' b=0 のとき 0 による割り算エラーでプログラムが
dim r As Double
' 停止しないための処置
  r = b.x * b.x + b.y * b.y
  ComplexDiv.x = (a.x * b.x + a.y * b.y) / r
  ComplexDiv.y = (a.y * b.x - a.x * b.y) / r
End Function
' exp(a) 指数関数
Public Function ComplexExp( a As ComplexDb1) As ComplexDb1
Dim r As Double
  r = Exp(a.x)
  ComplexExp.x = r * Cos(a.y)
  ComplexExp.y = r * Sin(a.y)
End Function
```

注1) ユーザ定義データ型 ComplexDb1 は複素数を記憶するデータ型で定義文は以下のとおり

```
Type ComplexDb1
  x as Double '実数部
  y as Double '虚数部
End Type
```

注2) ユーザ定義関数 Laplacefunction() は ComplexDb1 型であり、ここに逆変換したい関数の計算手順を記述する。以下は  $1/p$  (ステップ関数) の例である。

```
Function Laplacefunction( p As ComplexDb1) As ComplexDb1
Dim b As Double
  b=p.x * p.x + p.y * p.y
  Laplacefunction.x = p.x / b
  Laplacefunction.y = - p.y / b
End Function
```