

2. ロボットの入出力関係

ロボットを解析する上で必要な知識は、他の機械と同じく、静的な力の釣り合いを対象とする静力学、時間に対する位置・姿勢の変化、すなわち、幾何学的な関係を対象とする運動学、運動と力の関係を対象とする動力学に大きく分類される。ロボットでは、これらはいずれもロボットの入力に対する出力、すなわち、入出力関係をその基礎とする。そこで、ロボットの静力学、運動学、動力学をそれぞれ詳しく学ぶ前に、ロボットの入出力関係について学習する。

2-1 入出力変位関係

図 2.1 に示す開ループロボットの入出力関係として、能動ジョイントの入力角変位と出力点位置との関係を、ベクトルを利用して導いてみよう。点 A から点 B へ向かうベクトルを l_1 、点 B から点 P へ向かうベクトルを l_2 とし、さらに、点 O から出力点 P へ向かうベクトルを P とすれば、ロボットの任意の姿勢に対して以下の関係式が導かれる。

$$l_1 + l_2 = P \quad (2.1)$$

このように、各リンクの長さや姿勢（方向）や、出力点位置をベクトルで表せば、ロボットの幾何学的な関係を容易にベクトル方程式で表すことができる¹。

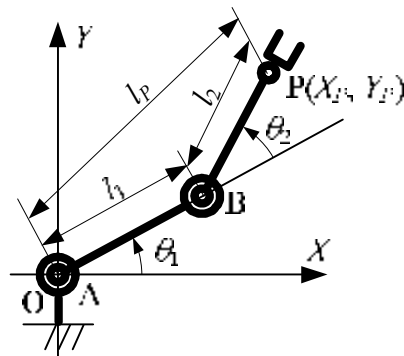


図 2.1 開ループロボットの入出力関係の解析

¹ 厳密には、このように始点と終点を結ぶ向きを持った線分で表されるベクトルを幾何ベクトルと呼び、また、数値の列で表されるベクトルを数ベクトルと呼ぶ¹⁾。しかし、本編ではこれらを単にベクトルと記し、また、数ベクトル中の要素をベクトルの成分と呼ぶ。

上式において、ベクトルの成分を用い演算を行えば出力点位置と能動ジョイントとの関係が得られる。演算を容易に行う方法として、複素平面における極表示を利用しベクトルの成分を表す。図 2.1 に示すように X 軸から θ 回転した長さ l のベクトルは、 X 軸を実軸として $le^{i\theta}$ で表される。

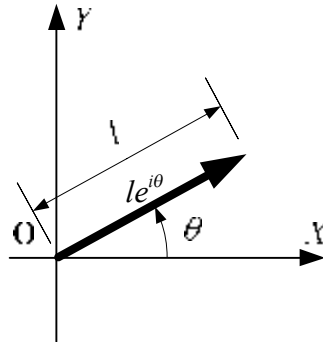


図 2.2 複素数を利用したベクトルの成分の表現

同表現方法を用い、図 2.1 中の記号を用いて式(2.1)を表せば次式となる。

$$l_p e^{i\psi} = l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2.2)$$

ここで、複素数による極表示はオイラーの公式より、三角関数を用いた次式と等価である。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \quad (2.3)$$

したがって、 $l_1 e^{i\theta_1}$ は

$$l_1 e^{i\theta_1} = l_1 \cos\theta_1 + i \cdot l_1 \sin\theta_1 \quad (2.4)$$

となる。上式において、実部が XY 座標における X 座標値を、虚部が Y 座標値を示している。したがって、出力点の X および Y 座標、 X_p および Y_p は、式(2.2)右辺における実部および虚部を整理することにより、それぞれ入力角変位 θ_1 および θ_2 に対する関数として次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} X_p &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ Y_p &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

以上のようにロボットのリンクをベクトルとして考え極表示を用いれば、2次元平面内におけるロボットの位置・姿勢を簡潔に表すことができ、さらに、座標を求めることができる。

2-2 ヤコビ行列を用いたロボットの入出力表現

前節で求めた開ループロボットの入出力関係を表す式が示すように、関節ロボットの入出力関係は非線形である。したがって、ロボットの出力部の位置・姿勢と、能動ジョイントの変位の関係、すなわち入出力関係を求めるには、非線形関数である三角関数の逆関数の演算などが必要となり複雑である。特に、ロボットの自由度が増加するにつれ、入出力関係の解析は困難となる。しかし、ロボットの微小な運動に注目すれば、その入出力関係を線形関係で表すことができる。例えば開ループ形ロボットの入力角の微小変位 $\Delta \theta_1$, $\Delta \theta_2$ と、出力点の微小変位 ΔX_p , ΔY_p との関係を、式の両辺の微分を利用し求めれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_p &= -l_1 \sin \theta_1 \cdot \Delta \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) \\ \Delta Y_p &= l_1 \cos \theta_1 \cdot \Delta \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

上式を整理し行列で表示する。

$$\begin{bmatrix} \Delta X_p \\ \Delta Y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

出力点の変位を表すベクトルを \mathbf{P} とし、さらに、各関節角の変位を成分とするベクトルを $\boldsymbol{\theta}$ として定義し、これらの微少量を Δ を付すことで表すこととし上式を表示する。なお、本書では単にベクトルと記す場合は、原則として列ベクトルを指す。

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{J} \cdot \Delta \boldsymbol{\theta} \quad (2.8)$$

\mathbf{J} は式(2.7)中の行列に相当しヤコビ行列と呼ばれる。独立して出力可能な変位および姿勢の数が m 、入力変位数が n であるロボットのヤコビ行列は一般に次式のように表される。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial X_m}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_m}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial X_m}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

X_i は出力点の並進および回転変位を表している。上式のように、出力点の微小変位と入力角の微小変位の関係はヤコビ行列中の要素を定数として線形関係で表される。したがって、ロボットの微小な運動は、線形な関係式として表すことができる。さらに、 \mathbf{P} および $\boldsymbol{\theta}$ を時間の関数とすれば、式(2.8)は時間に関する微分関係式として表すことができる。

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.10)$$

" \cdot "は時間による微分を表している。これらロボットの微小な入出力関係を、ロボットの入出力微分関係と呼ぶことがある。同関係を利用すれば、目標とする出力点の変位量 \mathbf{P} に到達するための、各時間の速度 $\dot{\mathbf{P}}$ を定めることにより、能動ジョイントの速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ を決定することができる。例題に示すように、このようにして微小時間ごとのジョイント速度を決定することにより、ロボットの制御を行うこともできる。しかし、一般に並進変位に関しては高精度な制御が行えるが、姿勢の制御に関しては難しい。(浅川さんの論文)

ヤコビ行列はロボットの運動学における非線形な関係を線形関係で表す有用な手法であり、運動学のみならず力学の解析においてもしばしば利用される。

(例題) ヤコビ行列を用いたロボットの姿勢制御

2-3 ロボットの特異姿勢

本書ではロボットの出力点または出力リンクが到達可能な領域を到達可能領域、また、以上の領域に出力リンクの角変位をあわせて作業領域と呼ぶ。作業領域には、物理的な単位の異なる並進変位と回転変位が含まれることに注意してほしい。

(コラム)

ロボットの用語を定めた JISB0134 “産業用マニピュレーティングロボット—用語” によれば、作業領域とは、エンドエフェクタを回転させるジョイント部の到達領域および同ジョイントの回転角をあわせたものとして定義されている。JIS では、ロボットに関する用語が主に産業用ロボットを製作、使用する観点から、定義されていることがわかる。JIS に目を通すと、ロボットを製作・使用する上での注意点や問題点もわかり大変興味深い。是非、一読してほしい。

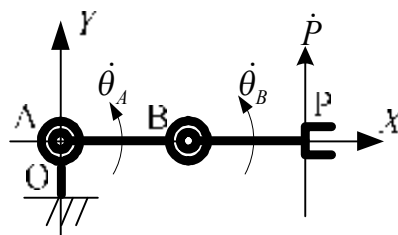
ロボットは、作業領域内の特定の位置・姿勢において、その自由度が減少または増加し、十分な動作が行えなくなる場合がある。このような位置・姿勢を特異姿勢または特異点と呼ぶ。代表的な特異姿勢のひとつは、ロボットの出力部が到達し得る境界上に達する場合であり、全てのロボットにおいて生じる。例えば、開ループ形ロボットでは、図 2.3(a)に示すようにリンクが一直線となる場合が特異点である。この状態で、A および B 点に配置されたアクチュエータによる角速度 $\dot{\theta}_A$ および $\dot{\theta}_B$ によって、ロボットの出力点 P に生じ

る速度 \dot{P} の方向は $\dot{\theta}_A$, $\dot{\theta}_B$ の大きさがいかなる値であっても Y 軸方向のみである. すなわち, 図 2.3(a) のロボットは 2 自由度であるが, 図 2.3(a) の姿勢においては出力点の運動は Y 軸方向のみとなり自由度が減少する.

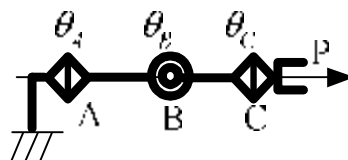
[コラム: 図 2.3(a) のロボットが, その出力点を X 軸正方向に動かすできないことは当然であるが, 内側にも動かさないことは以上の説明の通りである. 別の説明方法として, 今, 点 A , B および P 間にわずかなずれもなく一直線となっており, 同直線に沿って出力点 P を圧縮する場合を考えてみよう. もし, 圧縮力が厳密に点 AP 上に沿っていれば, ロボットは静止した状態を保つ. すなわち, 図 2.3(a) のロボットは X 軸負方向には動けないことがわかる.

このような特異姿勢を避けている状態がみうけられるロボットの身近な例として, 2 足歩行ロボットがあげられる. 彼らの多くは常に静止した状態でも膝を曲げている. これは特異姿勢を避けるためである.]

図 2.3(b) は, ロボットのアームではなく, ハンドによく用いられるメカニズムであるが代表的な特異姿勢の例として示す. 図 2.3(b) のように, 能動ジョイントである A および C 点の回転軸が図に示すように同軸上となる場合, いずれの能動ジョイントの回転によっても生じる姿勢変化は同一軸周りの運動となり自由度は減少する. ロボットアームにおいても, このようにいずれかの能動ジョイントの回転軸が一致する場合, 同じく特異姿勢となる.



(a) アームが伸びきった状態



(b) 回転軸が同軸となった状態

図 2.3 特異姿勢

図 1.10 で示した平行ロボットには、以上で述べた状態での特異姿勢に加え、平行ロボット特有の特異姿勢が存在する。図 2.4 は、3 つの連鎖からなり平面内において 3 自由度の運動が可能で平行ロボットである。通常、点 $A_1 \sim A_3$ が能動ジョイントとなり、平面内で出力リンク P の位置・姿勢決めを行う。各連鎖の到達可能な領域の境界が同ロボットの特異姿勢となることは図 2.3 のロボットと同じであるが、図 2.4 のようにリンク B_1C_1 と B_2C_2 が同一線上となる場合、出力リンク P は B_1B_2 に対して垂直方向の負荷を支持できないとともに、点 A_1 と A_2 に配置されたアクチュエータの運動が独立でなくなる。図 2.3 で示したような特異姿勢はロボットの制御可能な運動が限定されてしまうという観点から避けなければならぬ姿勢であるが（注釈：力学的に不利な場合もある）、図 2.4 に示すような特異姿勢は、さらに、アクチュエータに大きな負荷が生じることになるので破損にもつながりため、絶対に避けなければならない。このような平行ロボット特有の特異姿勢は、出力リンクの到達可能な領域の内部に存在し、作業領域を小さくする原因の一つとなっている。

特異姿勢は以上で述べた状態の他にも複数存在し、その把握は容易ではない。次節において基本的な特異姿勢の解析方法を学習するが、興味があれば多くの研究がなされているので、それらを参照してほしい。

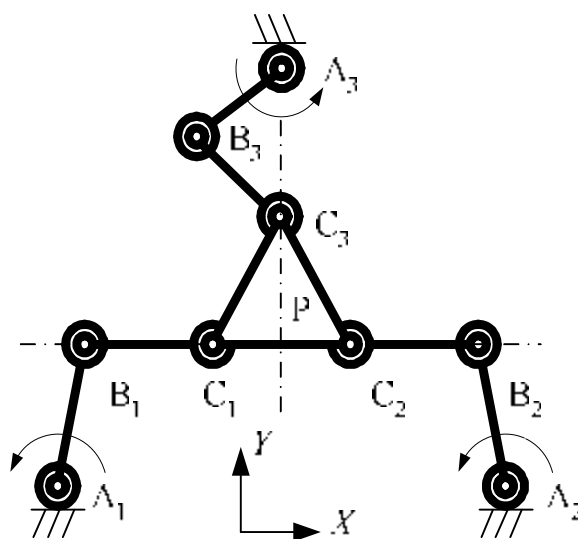


図 2.4 平行メカニズムの特異姿勢

2.4 ヤコビ行列による特異姿勢の解析

特異姿勢ではロボットの制御が不可能となり、パラレルロボットにおいては駆動部に大きな負荷が作用する場合もある。したがって、ロボットの設計、制御時にはあらかじめ特異姿勢となる状態を求めて避ける必要がある。

特異姿勢を求める基本的な方法はヤコビ行列を利用することである。式(2.10)より、出力点の速度に対する能動ジョイントの速度はヤコビ行列を用い次式で表される。

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{J}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{P}} \quad (2.11)$$

上式はヤコビ行列 \boldsymbol{J} の逆行列 \boldsymbol{J}^{-1} が求められるときのみ成り立つ。逆行列 \boldsymbol{J}^{-1} が求められない場合は、 $\dot{\boldsymbol{P}}$ に対する $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ が存在せず、ある方向へは運動できない。すなわち、特異姿勢となる。ヤコビ行列 \boldsymbol{J} の逆行列が求められない場合とは、 \boldsymbol{J} を構成する行ベクトルに互いに従属なベクトルが存在する場合であり、能動ジョイントに対して、出力点の各変位を独立して決定できなくなる場合である。これは、ある行ベクトルが零ベクトルとなる場合も含む。したがって、特異姿勢となる条件は、ロボットの自由度が n である場合にヤコビ行列の階数が小さくなる場合、すなわち

$$\text{rank}(\boldsymbol{J}) < n \quad (2.12)$$

であり、具体的には行列式を用い次式で評価される。

$$\det \boldsymbol{J} = 0 \quad (2.13)$$

なお、上式で評価される特異姿勢は入力に対して出力不可能な運動が生じる、すなわち、出力変数の一部が従属となり出力自由度が減少する場合を示す。パラレルロボットで生じる特異姿勢の条件は次式で表される。

$$\text{rank}(\boldsymbol{J}^{-1}) < n \quad (2.14)$$

すなわち

$$\det \boldsymbol{J}^{-1} = 0 \quad (2.15)$$

上式が成り立つ場合、入力を固定しても出力部の運動が固定されない状態が生じる、または、入力変数の一部が従属となる状態となる。すなわち、図 2.4 に示すように出力リンクが Y 軸方向に自由に運動可能、または、リンク A_2B_2 の運動に対しリンク A_1B_1 に従属的な運動が生じてしまう特異姿勢となる。

比較的低自由度なロボットに関しては以上のような解析は容易に行えるが、ロボットの自由度が増加するにつれ特異姿勢の把握は困難になる。また、本書では冗長な自由度がなく、ヤコビ行列が正方行列となるロボットに関して特異姿勢の解析を示したが、冗長な自由度を持つロボットにおいても上述のような考え方で特異姿勢の把握が行える。これらの

詳細に関しては、例えば文献 () を参照されたい。また、特異点の解析方法としては、この他、ロボットの運動しやすさの評価量などから間接的に求めることも検討されている()。

(例題：ヤコビ行列による特異点解析)

図 2.1 の開ループロボットが特異姿勢となる条件を、ヤコビ行列を利用して求めよ。

(答) ヤコビ行列は式(2.7)で示したように次式となる。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

したがって

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J} &= l_1 l_2 [\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1] \\ &= l_1 l_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\det \mathbf{J}$ が零となる条件は

$$\theta_2 = n\pi \quad (2.18)$$

n は整数であり、これは図のロボットの2つのリンクが伸びきった状態、または、重なった状態であり、先に述べた出力点が到達距離境界に達した状態となる特異姿勢を表している。

[コラム：ヤコビ行列と減速比]

ヤコビ行列は、各能動ジョイントの速度に対する出力部の速度の比を表していると考えられる。一般の機械の減速比と異なることは、その値がロボットの運動に伴い複雑に変化することと、一つの出力速度に対して、独立した複数の入力が存在することである。

特異姿勢の中で、運動が不可能な方向が生じる特異姿勢は、入出力速比が零となる場合であり、同時に入出力比が無限となる。すなわち、コラムでも述べたように特定の方向の負荷に対しては、ロボットの入力が零であっても静止状態を保つことが可能となる。また、パラレルメカニズムで生じる特異姿勢は入出力速比が無限となり、入出力比が零となる場合である。

パラレルメカニズム特有の特異姿勢は、機構の運動が不定となる絶対に避けなければならない姿勢であるが、特手方向の運動が行えなくなる特異姿勢は、機構の運動が制限されても不定にはならず、わずかな力で負荷を支持できることから、利用できないこともな

vi.]