

### 3. ロボットの静力学

ロボットの設計・制御において、まず必要となる力の解析は、その入出力関係である。ロボットの入力部に必要な力の解析は、前章で述べた入出力微分関係を利用すれば容易に行える。また、出力部に作用する力に対して生じるロボットの变形解析も同様に可能となる。本章ではこれら入出力関係の静力学、さらに、ロボットの強度設計を行うために必要となるジョイントやリンクに作用する力の解析についても学習する。

#### 3.1 入出力関係に関する静力学（トルク，出力変位誤差）の解析

##### 3.1.1 トルクの解析

図 3.1 に示す冗長自由度を有さない  $n$  自由度の関節ロボットが出力点で力  $\mathbf{F}$  を発生するために、各能動ジョイントに要するトルク  $T_i (i=1\sim n)$  を求めてみよう。ロボットが力  $\mathbf{F}$  を発生しながら出力点を  $\Delta\mathbf{P}$  だけ変位させた場合を考える。  $\Delta\mathbf{P}$  の変位に対して  $n$  個の能動ジョイントに生じる角変位量  $\theta_i (i=1\sim n)$  を要素とする列ベクトルを  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  とする。リンクやジョイント部分の变形、摩擦などを無視すれば、出力点が行う仕事と、すべての能動ジョイントによってなされる仕事の和は等しいことから次式が成り立つ。

$$\mathbf{F}^T \Delta\mathbf{P} = \mathbf{T}^T \Delta\boldsymbol{\theta} \quad (3.1)$$

ただし

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T, \quad \mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)^T$$

$$\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)^T, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$$

ここで、  $\Delta\mathbf{P}$  および  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  が微小であるとして微分形で表す。すなわち

$$\mathbf{F}^T d\mathbf{P} = \mathbf{T}^T d\boldsymbol{\theta} \quad (3.2)$$

$d\mathbf{P}$  と  $d\boldsymbol{\theta}$  の関係はヤコビ行列を用いて表される。

$$d\mathbf{P} = \mathbf{J}d\boldsymbol{\theta} \quad (3.3)$$

上式を式(3.2)に代入し整理すれば次式となる。

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \quad (3.4)$$

すなわち、ヤコビ行列を用いれば、出力点で発生する力と各能動ジョイントに必要なとするトルクとの関係を容易に知ることができる。なお、以上では出力点に発生する並進力と、能動ジョイントのトルクとの関係を例に示したが、能動ジョイントが直進ジョイントであり並進力を入力として発生する場合は、トルク  $T_i$  を並進力に置き換えればよい。また、パラレルロボットなどにおいて出力リンクで回転力も発生する場合は力  $\mathbf{F}$  に回転力を含めるこ

とで同じく解析が行える。

(例題 3.1) 図 2.1 の開ループロボットの出力点に作用する負荷  $\mathbf{F}$  に対して能動ジョイント A および B に必要なトルク  $T_1$  および  $T_2$  を求めよ。

(解答) 能動ジョイント A および B の微小角変位と出力点の X および Y 方向微小変位との関係を表すヤコビ行列は 2・2 節より次式で表される。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

したがって、出力点に作用する力  $\mathbf{F}$  の X および Y 方向の成分を  $F_X$ ,  $F_Y$  とすれば式(3.4)および(3.5)より

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

上式を確認してみよう。ロボットの出力点 Y 方向に力  $F_Y$  が作用している場合を考える。

このとき、能動ジョイント A および B から点 P までの X 方向の距離  $S_A$  および  $S_B$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} S_A &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ S_B &= l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

で表される。したがって、 $F_Y$  によるトルク  $T_1$  および  $T_2$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= S_A \cdot F_Y = [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] F_Y \\ T_2 &= S_B \cdot F_Y = [l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] F_Y \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

となり、これは上の解において  $F_X$  の成分を零として求める結果に一致する。

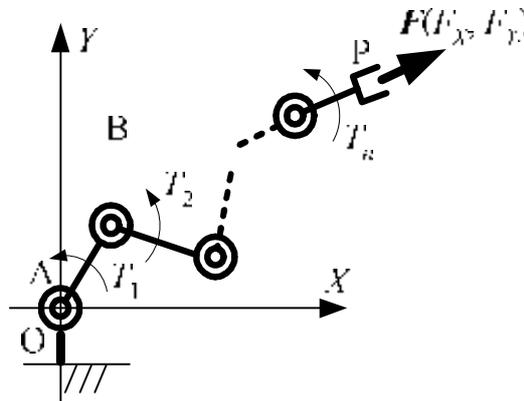


図 3.1 入出力関係の解析

例題 3.1 の解が示すように，ロボットの入力トルクは姿勢により非線形に変化する．ロボットの設計・制御時には，このような変化を把握し，入力トルクが小さくなるようなロボットの姿勢の選択や，適切な入力値の決定などを行う必要がある．このようなロボットの力学的特性の変化を，ロボットの姿勢が変化する作業領域全般にわたり把握する方法として静力学特性図がある．図 3.2 に，開ループロボットの入力トルクに関する静力学特性図を示す．

図 3.2 の同心円は開ループロボットの出力点 P が到達可能な作業領域を示している．なお，特異姿勢を避けるためにリンク AB と BP のなす角を  $30^\circ$  から  $150^\circ$  の範囲としている．静力学特性図の作成は以下のように行われる．まず，作業領域内においてロボットの姿勢を任意に変化させ，各姿勢においてロボットの力学的特性値（ここでは入力トルク）を求める．次に，得られた特性値を，その姿勢における出力点の座標にプロットし，特性値の分布を求める．さらに，特性値が等しくなる座標を等高線で結び静力学特性図とする．

図 3.2 は，リンク AB と BP の長さが等しく 0.5 である開ループロボットの能動ジョイント B に，出力点 P に作用する大きさが 1 である y 軸方向への負荷に対して要する入力トルクの変化を示す静力学特性図である．図のように開ループロボットの出力点が 0.4 の等高線上にある場合，能動ジョイント B に必要なトルクは 0.4 であることがわかる．

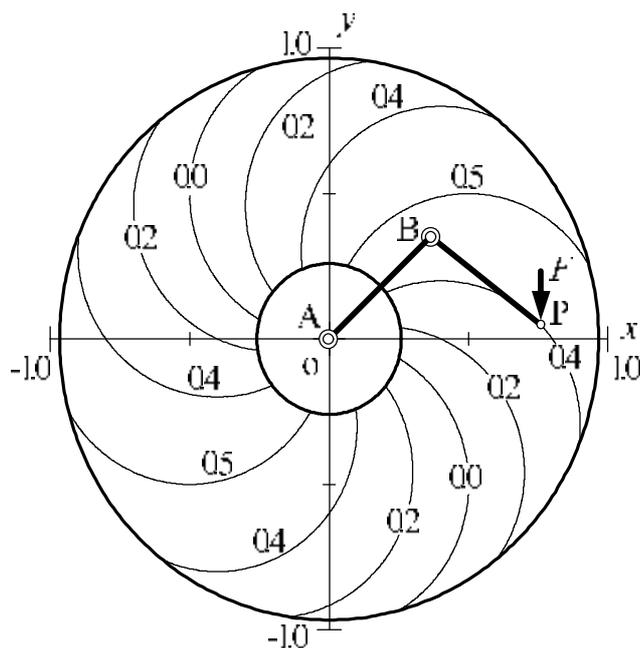


図 3.2 入力トルクに関する静力学特性図

### 3-1-2 出力変位誤差の解析

ロボットは出力部を先端とする片持ちばり構造であることから，出力部に作用する力による変形の影響は大きい．変形は，リンク，ジョイントの各部分で生じるが，特に，入力部における減速機，減速機とアクチュエータとの連結部分の剛性は低く，弾性変形が生じやすい．すなわち，ロボットの出力部に作用する力に対して入力部である各能動ジョイントに力が作用して弾性変形生じさせ，結果として各能動ジョイントに予想外の入力変位が発生することになり，出力部の変位誤差となって表れる．このようにして生じる出力変位誤差も，各能動ジョイントのバネ定数が明らかであればヤコビ行列を利用して求めることができる．

$n$  自由度であるロボットの各能動ジョイントのバネ定数を  $k_{Ti}(i=1\sim n)$  として次の対角行列を定義する．

$$\mathbf{k}_T = \begin{pmatrix} k_{T1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{T2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{Tn} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

前節の記号を用いれば，トルク  $\mathbf{T}$  と生じる変形  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  との関係は次式で表される．

$$\mathbf{T} = \mathbf{k}_T \Delta\boldsymbol{\theta} \quad (3.10)$$

ただし， $\Delta\boldsymbol{\theta}$  はアクチュエータの変位ではなく，入力部の弾性変形であることに注意する．ここで， $\mathbf{T}$  は前節で示したように出力部に作用する力  $\mathbf{F}$  からヤコビ行列  $\mathbf{J}$  を用いて式(3.4)より求められる．そこで，上式において  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  が微小であるとして  $d\boldsymbol{\theta}$  とし，式(3.4)を代入すれば次式となる．

$$\mathbf{J}^T \mathbf{F} = \mathbf{k}_T d\boldsymbol{\theta} \quad (3.11)$$

さらに，各能動ジョイントの微小変位  $d\boldsymbol{\theta}$  に対する出力部の変位は，入出力の微分関係よりヤコビ行列を用いて  $\mathbf{J}^{-1} d\mathbf{P}$  で表されるから，上式は次式のように表される．

$$\mathbf{J}^T \mathbf{F} = \mathbf{k}_T \mathbf{J}^{-1} d\mathbf{P} \quad (3.12)$$

ここで

$$\mathbf{C} = \mathbf{J} \mathbf{k}_T^{-1} \mathbf{J}^T \quad (3.13)$$

として式(3.12)を整理すれば次式となる．

$$d\mathbf{P} = \mathbf{C} \mathbf{F} \quad (3.14)$$

$C$  はコンプライアンス行列と呼ばれる。上式によれば出力部に作用する力に対して、すべての能動ジョイントの弾性変形により生じる出力変位誤差が求められる。

さて、式(3.14)および(3.13)が示すように出力部に作用する負荷に対して、入力部の弾性変形により生じる出力変位誤差は、ヤコビ行列に依存し、トルクと同じくロボットの寸法のみならず、姿勢により変化することがわかる。トルクのロボットの姿勢に対する変化は、前節で示したように比較的単純であるが、出力変位誤差は各能動ジョイントの弾性変形により生じる出力部の変形もロボットの姿勢により変化することから複雑である。その様子を開ループロボットについて静力学特性図で示せば図のようになる。

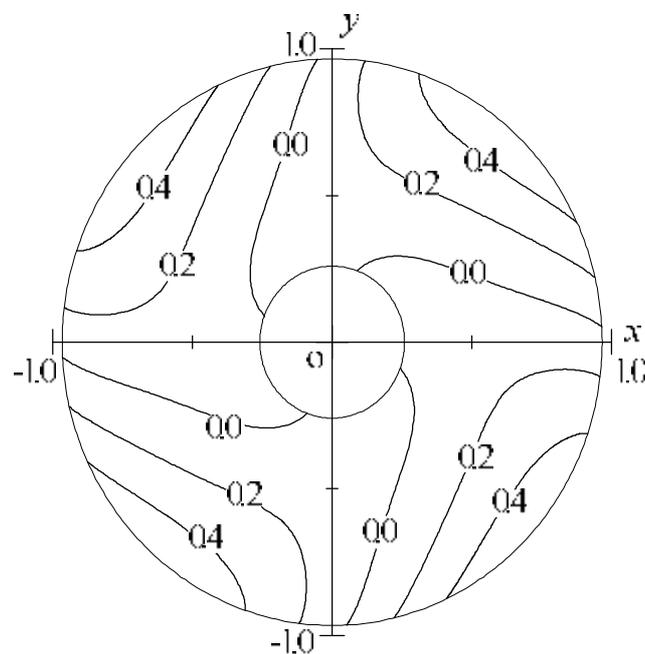


図 3.3 出力変位誤差に関する静力学特性図

図 3.3 は、図 3.2 でトルクの変化を示した同一の開ループロボットに関して、出力点  $P$  に作用する大きさが 1 である  $y$  軸方向への負荷に対して生じる  $x$  軸方向への出力変位誤差の変化を示した静力学特性図である。なお、各能動ジョイントのねじれ剛性を 1 としている。図のように、同じ大きさの負荷に対しても、機構の姿勢により発生する出力変位誤差は大きく変化することがわかる。

<演習>

### 3-2 強度に関する静力学（対偶作用力，曲げモーメント）の解析

### 3-2-1 図式解法による力の解析

静力学解析としてロボットの設計となるのは、能動ジョイントに必要な力だけでなく、各リンクや受動ジョイントに作用する力、モーメントを求め、これらに耐えうるリンク、軸受の寸法を決定する必要がある。特に、ジョイントに作用する力、すなわち、対偶作用力が大きい場合、用いる軸受のみならず、軸受を取り付けるリンクも大型化し、結果としてロボット全体の質量増加を招くことになる。そこで、本節では、ロボットの出力部に作用する力に対し、ロボットの各リンクやジョイントに作用する力、モーメントの解析方法を学習する。

まず、ロボットに作用する力の図式による解法について学習する。図式解法では各リンクに作用する力を、それぞれのリンクにおいて満たすべき力学的な条件を考慮して図示し、その大きさ方向を求める。なお、以下の図式解法はクレモナの解法とも呼ばれる。図式解法の重要なポイントは以下の通りである。

1. それぞれのリンクに作用する、各外力および対偶作用力の作用線は1点で交わる。(平行な場合は無限遠で交わると考える。)
2. それぞれのリンクにおいて、各対偶作用力および外力をベクトル表示すれば、これらによって閉じた三角形が構成される。
3. リンクの両端が回転自由なジョイントであり、リンクに外力が作用しない場合、リンクの長手方向にのみ作用力を生じる。

1.および2.は静的な力の釣り合いから導かれる。また、3.に関しては両端が回転自由でありモーメントが発生しない、すなわち、ジョイントからは回転力が伝わらないことから導かれる。

(例題) 図式解法で、図 3.2 に示す平行クランク形ロボットの出力点  $P$  に作用する力に対する対偶作用力を求めよ。

(解答) まず、ジョイント点  $C$  に作用する力はリンク  $CD$  からの反作用力と考えられる。ここでリンク  $CD$  は、両端が回転自由で外力が作用しないことから、力の作用方向はリンクの長手方向となる。したがって、ジョイント点  $C$  への対偶作用力の作用方向は図に示す  $F_C$  の方向となる。ここで  $F_C$  の作用線と出力点  $P$  に作用する力の作用線の交点は  $Q$  となる。したがって、点  $B$  の対偶作用力の作用線は点  $B$  と点  $Q$  を結ぶ直線上となる。これら 3

つの対偶作用力の作用線を平行移動して構成される閉じた三角形を考える． $F_p$  の大きさが明らかであれば，三角形の各辺の長さが決定される．このようにして決定された三角形の各辺の方向および長さが，各点の対偶作用力の方向および長さに相当する．

図式解法により各ジョイントに作用する力が明らかになれば，リンクに生じる曲げモーメントも得られる．ただし，図式解法では，ロボットの姿勢や，作用力の方向が変化するとともに，対偶作用力を求めなおさなければならない．単純なロボットであれば，ロボットの姿勢や作用力の方向に対して，力のベクトルで構成される三角形の関係を求め一般式を導くことも可能である 000．

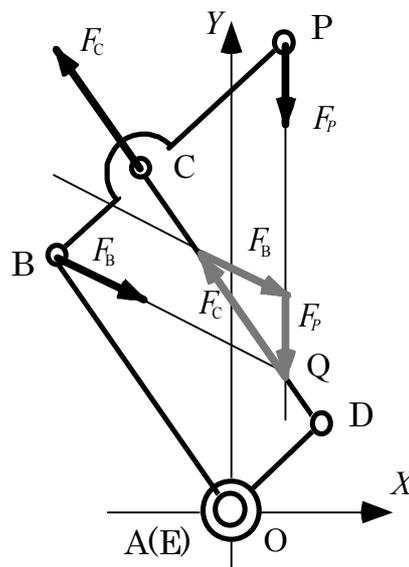


図 3.2 ロボットに作用する力の図式解法

### 3-2-2 マトリックス法による力の解析

計算機を用いて解析を行う場合には，以上のような図式解法よりも各リンクにおいて力およびモーメントの釣り合い式を導き，すべてのリンクに関する方程式をマトリックスで表現して解く方法が便利である．このような方法をマトリックス法と呼ぶ．マトリックス法による解法手順は以下の通りである．

1. 図のように力の方向を表すための座標系を設定するとともに，ロボットを構成するリンクを仮想的に分割する．
2. それぞれのリンクの端点，すなわち，ジョイント部に作用する各軸方向の並進力を記号で示す．なお，隣接するリンク間では，結合されている，すなわち，ジョイン

トを構成している端点同士には、作用反作用の法則から、絶対値が等しく正負が逆となる力が作用することを利用して力を記号で表す。

3. それぞれのリンクにおいて、ジョイントに作用する力および外力を考慮して、各軸方向および各軸回りの力およびモーメントの釣り合い式をそれぞれ導く。
4. 個別に求めた力およびモーメントの釣り合い式をまとめて、マトリックスで表す。
5. 以上で求めたマトリックスを解き、対偶作用力、入力トルクを求める。

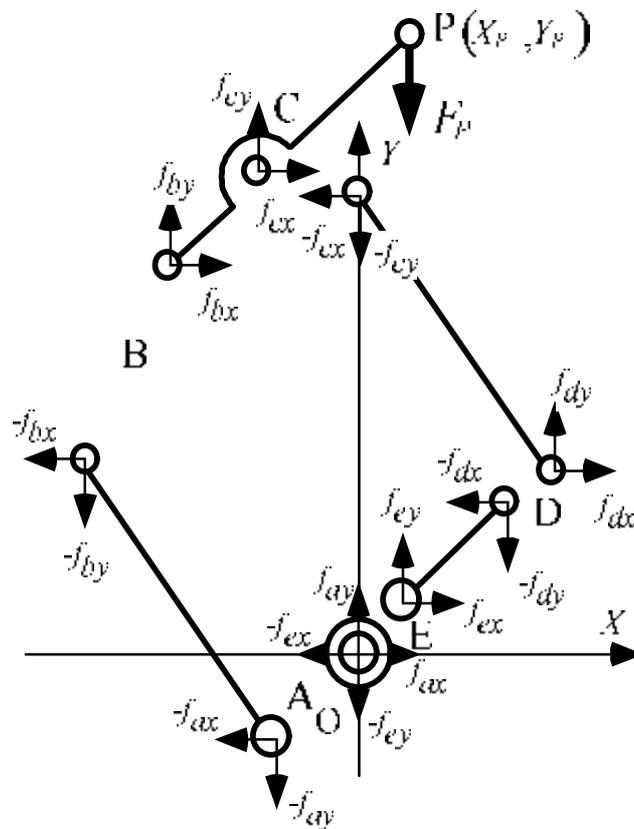


図 3.3 マトリックス方によるロボットの静力学特性解析

(例題) 図 3.3 に示す平行クランク形ロボットの各ジョイントに作用する力をマトリックス法で求めよ。なお、出力点には Y 軸方向に  $F_p$  の大きさの力が作用しているとする。

(解答) まず、各リンクを図 3.3 のように独立した状態で考え、それぞれのジョイントに作用する X 軸および Y 軸方向の力を図のような記号で表す。次に、各リンクにおいて X, Y 軸方向の力の釣り合いおよびモーメントの釣り合い力を導く。なお、リンク BP に関する

る力の釣合い式では点 P に作用する力を，リンク AB および DE におけるモーメントの釣合い式では，能動ジョイントである点 A および E 周りに作用する入力トルクを考慮する．例として，図のリンク BC に関して力の釣り合い方程式を求めると次式になる．

$$\left. \begin{aligned} f_{cx} + f_{bx} &= 0 \\ f_{cy} + f_{by} + F_P &= 0 \\ \mathbf{r}_c \times \mathbf{f}_c + \mathbf{r}_p \times \mathbf{F}_P &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

上式中のモーメントに関する式は，大きき，向きが  $\mathbf{r}_i$  で表されるはりの先端に，大きき，方向が  $\mathbf{F}_i$  である力が作用する場合のモーメントを表す式であり，剛体に作用する複数の力によるモーメントを，平面のみならず空間においても容易に求められ便利である．上式において  $\mathbf{r}_c$ ， $\mathbf{r}_p$  はそれぞれ，点 B を起点とする点 C，点 P へのベクトルであり，上式中 3 番目の式は点 B 周りのモーメントの釣り合いを表している．なお，モーメントは，いずれかの点に注目し，その周りで釣り合い式をたてればよい．

外積  $\mathbf{r}_c \times \mathbf{f}_c$  の演算例を次に示そう．ここでは，参考のため図 3.3 の XY 座標系に Z 軸を加え，X, Y, Z 軸それぞれの方向への単位ベクトルが  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  で表されるとし，各ジョイントの X, Y, Z 座標を，それぞれのジョイントを示す記号に下付の添え字  $x$ ,  $y$ ,  $z$  を付して表す．ベクトル  $\mathbf{r}_c$  の成分を  $(r_{cx}, r_{cy}, r_{cz})$ ，点 C に作用する力  $\mathbf{f}_c$  の成分を  $(f_x, f_y, f_z)$  とすれば次式となる．

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c \times \mathbf{f}_c &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_{cx} & r_{cy} & r_{cz} \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{i}(r_{cy} \cdot f_z - r_{cz} \cdot f_y) + \mathbf{j}(r_{cz} \cdot f_x - r_{cx} \cdot f_z) + \mathbf{k}(r_{cx} \cdot f_y - r_{cy} \cdot f_x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

ベクトルが  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  に乗じられた成分は，それぞれのベクトルが表す軸周りのモーメントの大きさを示す．なお，本例題では実際には平面内の力学のみを考えればよいため， $r_{cz}$ ， $f_z$  は零である．すなわち，2 行 2 列の行列に対する外積の公式を用いて式(3.15)中の 3 番目の式は次式のように求められる．

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c \times \mathbf{f}_c + \mathbf{r}_p \times \mathbf{F}_P &= \begin{bmatrix} C_x - B_x & C_y - B_y \\ f_{cx} & f_{cy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_P - B_x & Y_P - B_y \\ 0 & F_P \end{bmatrix} \\ &= (C_x - B_x) f_{cy} - (C_y - B_y) f_{cx} + F_P (X_P - B_x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

なお，外積を用いる場合は，演算しあうベクトルの順序によりモーメントの正負が異なってしまうので注意が必要であり，一般には以上のように軸周りに反時計回りの回転を発生

させるモーメントを正とする.

以上のようにして得られる各リンクの力, モーメントに関する釣り合い式を全てのリンクについてまとめてマトリックス化する. すなわち

$$\mathbf{Kf} = \mathbf{F} \quad (3.18)$$

ここで

$$\mathbf{f} = (f_{ax}, f_{ay}, f_{bx}, f_{by}, f_{cx}, f_{cy}, f_{dx}, f_{dy}, f_{ex}, f_{ey}, T_1, T_2)^T \quad (3.19)$$

であり,  $\mathbf{K}$  は  $r_{ix}$ ,  $r_{iy}$  からなる式を要素とする正方マトリックス,  $T_1$  および  $T_2$  は, それぞれ入力リンク AB, AD に作用する入力トルクであり, これらのリンクのモーメントの釣り合い式を導く際に考慮すべき成分である.

以上のようにして求めたマトリックスで表される方程式をガウスの消去法などを利用して式(3.18)を  $\mathbf{f}$  に関して解くことにより, ロボットの各対偶作用力および入力求められる.



## 4. ロボットの運動学

少数のリンクで構成されるロボットの位置・姿勢は、2章で学んだベクトル、三角関数などで容易に表現できる。しかし、実際のロボットは、多数のリンクから構成され、その位置・姿勢の表現には工夫を必要とする。特に、リンクの姿勢の表現に関しては、質点の運動学ではなく、剛体の運動学に関する知識が必要となる。本章ではロボットの位置・姿勢、さらに、運動を簡潔に表現する方法を中心に学ぶとともに、剛体の運動表現に関する理解を深める。

### 4-1 ロボットの位置と姿勢の表現

#### 4-1-1 ベクトルによるリンクの姿勢表現

ロボットを構成するリンクの位置の表現としては、例えば図 4.1 に示すようにリンク上に代表点として点 P を 1 つ設定し、その座標値で表す方法が考えられる。これに対し、リンクの姿勢は 1 つの代表点で表すことはできない。

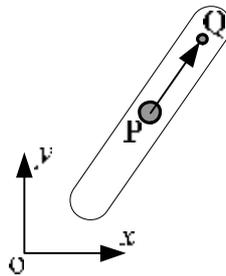
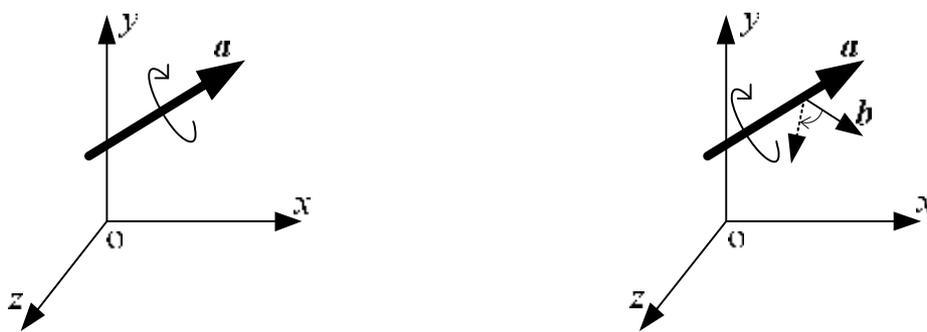


図 4.1 リンクの位置と姿勢の表現

2次元平面においてリンクの姿勢は、リンク上の2点の座標値で定義されるベクトルで表すことができる。すなわち、図 4.1 でリンク上に点 Q を設置し、点 PQ を結ぶベクトルを用いれば、リンクの方向、すなわち姿勢が表現できる。しかし、3次元空間では単体のベクトルで、リンクの姿勢を表すことはできない。図 4.2(a)に示す3次元空間におけるベクトル  $\mathbf{a}$  について考えてみよう。ベクトル  $\mathbf{a}$  が、ロボットのあるリンクの長手方向に沿って固定されていたとする。このとき、リンクの長手方向の姿勢はベクトル  $\mathbf{a}$  の方向によって表される。しかし、図 4.2(a)に示すようにベクトル  $\mathbf{a}$  を回転軸とするリンクの姿勢、すなわち、ベクトル  $\mathbf{a}$  そのものの回転を表すことはできない。



(a) 3次元空間におけるベクトル

(b) 有顔ベクトルによる姿勢の表現

図 4.2 ベクトルによる剛体の姿勢の表現

このようなベクトル周りの回転を表す方法として、図 4.2(b)に示すように、対象とするベクトル  $\mathbf{a}$  に、その方向が垂直方向となるベクトル  $\mathbf{b}$  を付加し、付加したベクトル  $\mathbf{b}$  の方向を利用する方法が提案されている<sup>(1)</sup>。これは、いわばベクトルに顔を設け、その顔の方向でベクトルを軸とする回転を表すものであり、有顔ベクトルと呼ばれている<sup>(2)</sup>。

有顔ベクトルはリンク、すなわち剛体の姿勢を表す方法として有用である。しかし、ロボットの姿勢表現では

1. 姿勢の変化が各関節の変位をパラメータとして表されること

または、

2. どのように運動すれば、その姿勢になるかが表されること

が必要となる。有顔ベクトルを用いた場合、ある瞬間におけるロボットのリンクの姿勢を容易に表し得るが、各関節変位との関係やその姿勢となるための運動を直接知ることはできない。そこで、これらを簡潔に表す回転行列を用いた方法について以下で学ぶ。

#### 4.1.2 二次元における回転行列

1.6 で述べたように、二次元平面ではリンクの姿勢に関する自由度は 1 であり取り扱いが容易である。そこで、まず、回転行列を用いた二次元における姿勢およびその変化に関する表現を学ぶ。

回転行列の一般的な利用方法は以下に述べるように大きく 2 通り存在する。一つは複数の座標系間の関係を表す場合であり、もう一つは単独の座標系において、ある物体の回転変位を表す場合である。まず、前者の場合を用い、複数のリンクに設定された座標間の関係を表すことにより、各リンクの姿勢を表す方法を学ぶ。

図 4.3 に示すジョイント数が 3 であるロボットで，出力リンク BP の姿勢を表現してみよう．そのために，図 4.3 に示すように原点が点 P に一致する座標系  $o_B-x_By_B$  を出力リンクに設定する．座標系  $o_A-x_Ay_A$  を静止リンクに固定した座標系とすれば，静止リンクに対する出力リンク BP の姿勢は，座標系  $o_B-x_By_B$  の各軸の，座標系  $o_A-x_Ay_A$  の各軸に対する角度で表すことができる．すなわち，座標系  $o_B-x_By_B$  は，座標系上の物体の位置を表すためだけでなく，その軸方向でリンクの姿勢を表すために用いる．

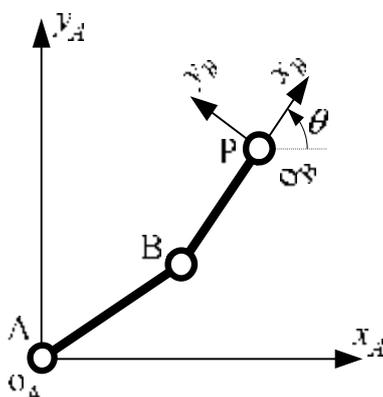


図 4.3 回転行列を利用した平面における位置・姿勢表現\*1（ここではベースと出力リンク上のみ座標系を設定し説明する．各ジョイント上に設定するのは後述）

このような複数の座標系間における相対的な関係を表す方法の一つが回転行列である．回転行列を用いて実際にリンクの姿勢を表してみよう．図 4.3 において  $o_A-x_Ay_A$  および  $o_B-x_By_B$  で表される座標系を図 4.4 のように原点を一致させて両座標系の姿勢の関係を検討する．なお， $o_A-x_Ay_A$  および  $o_B-x_By_B$  をそれぞれ座標系  $\Sigma_A$  および  $\Sigma_B$  と記す．

まず，座標系  $\Sigma_B$  上において， $\Sigma_B$  の各軸方向の単位ベクトルを表せば次式となる．

$$\left. \begin{aligned} {}^B x_B &= (1, 0)^T \\ {}^B y_B &= (0, 1)^T \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ここでベクトルの左肩の記号は，ベクトルの成分を表示している座標系を示す．これら座標系  $\Sigma_B$  の各軸方向を示す単位ベクトル  $x_B$  および  $y_B$  を座標系  $\Sigma_A$  で表せば次式となる．

$$\left. \begin{aligned} {}^A x_B &= (\cos \theta, \sin \theta)^T \\ {}^A y_B &= (-\sin \theta, \cos \theta)^T \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

これらをまとめ、次式で表す.

$${}^A\mathbf{R}_B = ({}^A\mathbf{x}_B, {}^A\mathbf{y}_B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

行列  ${}^A\mathbf{R}_B$  は座標系  $\Sigma_A$  からみた座標系  $\Sigma_B$  を構成する各軸の方向を表している. すなわち, 座標系  $\Sigma_B$  があるリンクに設定されていれば  ${}^A\mathbf{R}_B$  は座標系  $\Sigma_A$  に対するリンクの姿勢を表すことになり, 図 4.3 ではリンク BP の姿勢を表す. このようにして用いられる行列を回転行列と呼び, 特にある座標系が設定された剛体の姿勢を表すために用いる場合, 姿勢行列と呼ぶこともある.

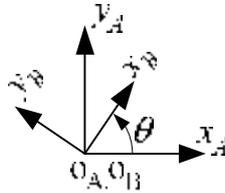


図 4.4 回転行列による姿勢の表現

回転行列を利用すれば, ある座標系で示されているベクトルの成分を他の座標系で示した成分に変換することができる. 座標系  $\Sigma_B$  上で表した任意のベクトル  ${}^B\mathbf{r}$  の成分

$({}^B r_x, {}^B r_y)^T$  を, 座標系  $\Sigma_A$  上で表す場合を考えてみよう. 座標系  $\Sigma_B$  上で表した  ${}^B\mathbf{r}$  の成分

$({}^B r_x, {}^B r_y)^T$  は, 座標系  $\Sigma_A$  から見れば座標系  $\Sigma_B$  上の  $x$  軸方向および  $y$  軸方向の単位ベクトル

のそれぞれ  ${}^B r_x$  倍および  ${}^B r_y$  倍となることから次式が導かれる.

$${}^A\mathbf{r} = {}^A\mathbf{x}_B {}^B r_x + {}^A\mathbf{y}_B {}^B r_y \quad (4.4)$$

さらに

$$\begin{pmatrix} {}^A r_x \\ {}^A r_y \end{pmatrix} = {}^A\mathbf{R}_B \begin{pmatrix} {}^B r_x \\ {}^B r_y \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

と表せる. すなわちマトリックス  ${}^A\mathbf{R}_B$  によって, 座標系  $\Sigma_B$  上で表したベクトルの成分を座標系  $\Sigma_A$  上で表した成分に変換することができる. 以上のように,  ${}^A\mathbf{R}_B$  は 2 つの座標間の関係を示すとともに, 座標変換の演算子として用いられる.

次に, 回転行列を用いたロボットの姿勢変化に関する表現について説明する. 図 4.5 に

示すようにベクトル  $\mathbf{r}$  および  $\mathbf{r}'$  を設定する.

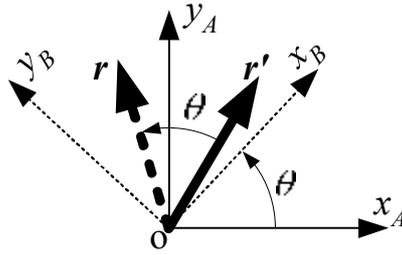


図 4.5 姿勢変化表現のための回転演算子

ここで、座標系  $\Sigma_B$  上で表したベクトル  $\mathbf{r}$  の成分，すなわち，ベクトル  ${}^B\mathbf{r}$  の成分と，座標系  $\Sigma_A$  上で表したベクトル  $\mathbf{r}'$ ，すなわち，ベクトル  ${}^A\mathbf{r}'$  の成分は等しいとする．以上で述べた回転行列の性質より，まず，次式が成り立つ．

$${}^A\mathbf{r} = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{r} \quad (4.6)$$

さらに，ベクトル  ${}^B\mathbf{r}$  と  ${}^A\mathbf{r}'$  の成分が等しいことから，式(4.6)より次式が成り立つ．

$${}^A\mathbf{r} = {}^A\mathbf{R}_B {}^A\mathbf{r}' \quad (4.7)$$

上式は，座標系  $\Sigma_A$  上で，ベクトル  ${}^A\mathbf{r}'$  が  ${}^A\mathbf{R}_B$  によってベクトル  ${}^A\mathbf{r}$  に変換されたと，とらえることができる．図 4.5 より座標系  $\Sigma_A$  上でのみ考えれば，ベクトル  $\mathbf{r}$  はベクトル  $\mathbf{r}'$  が原点周りに  $\theta$  の回転変位を施されたベクトルであり，式(4.7)はこの回転操作を表している．したがって式(4.7)では，回転行列  ${}^A\mathbf{R}_B$  はある単独の座標系上における回転変換を表している．この場合，上記の記号の表記法では適切でない．そこで，単独の座標系上における回転変換を表す行列を次式のように  $\mathbf{E}^{k\theta}$  で表す．

$$\mathbf{E}^{k\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$\mathbf{k}$  はベクトルの回転軸を示し，この場合は原点を通り紙面に垂直な軸である． $\mathbf{E}^{k\theta}$  は  $\mathbf{k}$  軸周りにベクトルを左回りに  $\theta$  回転させることを表している．

以上のことから回転行列は以下のように利用される．

1. 座標系  $\Sigma_A$  に対する座標系  $\Sigma_B$  の姿勢の表示．(姿勢行列)
2. 原点が一致している座標系  $\Sigma_A$  および  $\Sigma_B$  において，座標系  $\Sigma_B$  上で表したベクトルの成分の座標系  $\Sigma_A$  上での表現への変換．(変換写像)
3. 座標系  $\Sigma_A$  上でのベクトルの回転変換．(回転演算子)

なお，回転行列を表す記号は先述のように 1. および 2. として用いる場合は，2 つの

座標系間の関係に関連するものであるから  ${}^A R_B$  と記し、3.として用いる場合は  $E^{k\theta}$  などと記す.

なお、表記法  ${}^A R_B$  において以下の規則を利用すれば回転行列に関する演算が容易になる. 例えば、座標系  $\Sigma_A$  と座標系  $\Sigma_B$  の原点が一致している場合、 ${}^A R_B {}^B r$  は座標系  $\Sigma_B$  上で成分を表したベクトル  ${}^B r$  を座標系  $\Sigma_A$  上で表現したベクトル  ${}^A r$  に変換することであり、次式が成り立つ.

$${}^A R_B {}^B r = {}^A r \quad (4.9)$$

上式の左辺に注目すれば、隣接する上および下付の添え字が同一な場合、結果的にそれらを略せば右辺が導かれる. このことは後述する回転行列同士の乗算にも成り立つ. 例として原点が同じ位置である座標系  $\Sigma_A$ ,  $\Sigma_B$ ,  $\Sigma_C$  を考える. ここで、座標系  $\Sigma_C$  上でその成分を表したベクトル  ${}^C r$  を座標系  $\Sigma_B$  上で表せば次式となる.

$${}^B R_C {}^C r = {}^B r \quad (4.10)$$

さらに、ベクトル  ${}^B r$  を座標系  $\Sigma_A$  上で表せば次式となる.

$${}^A R_B {}^B r = {}^A r \quad (4.11)$$

式(4.10), (4.11)より

$${}^A R_B {}^B R_C {}^C r = {}^A r$$

上式は座標系  $\Sigma_C$  上でその成分を表したベクトル  ${}^C r$  を座標系  $\Sigma_A$  上で表す次式と等価である.

$${}^A R_C {}^C r = {}^A r \quad (4.12)$$

したがって

$${}^A R_C = {}^A R_B {}^B R_C \quad (4.13)$$

であり、上述の規則が成り立つことがわかる. なお、以上の演算は互いの座標系の原点が一致している場合のみ適用可能であることに注意が必要である.

### 4.1.3 三次元における回転行列

前項では、回転行列の特徴を把握するために、理解が容易な二次元を対象としてとりあげた. 三次元における姿勢の表現は二次元に比べ、いくつかの点で複雑となる. その一つは、二次元では姿勢の変化、すなわち回転の自由度は1であることに対し、三次元では回転の自由度が3となることである. もう一つは、回転変位が並進変位と異なり、ベクトルとして扱えないことであるが、これに関しては後述する. まず、実際に三次元空間におけ

る回転行列を前項と同様に求めてみよう。

二次元の場合と同様に、直交座標系  $\Sigma_A$  および  $\Sigma_B$  を考える。  $\Sigma_A$  に対する  $\Sigma_B$  の姿勢は、  $\Sigma_B$  の各軸方向の単位ベクトルの成分を  $\Sigma_A$  で表すことにより定義され、それらを  ${}^A\mathbf{x}_B$ ,  ${}^A\mathbf{y}_B$  および  ${}^A\mathbf{z}_B$  とすれば、3次元空間における回転行列  ${}^A\mathbf{R}_B$  は次式となる。

$${}^A\mathbf{R}_B = \left( {}^A\mathbf{x}_B, {}^A\mathbf{y}_B, {}^A\mathbf{z}_B \right) \quad (4.14)$$

また、座標系  $\Sigma_B$  上の任意のベクトル  ${}^B\mathbf{r}$ , すなわち、  $\left( {}^B r_x, {}^B r_y, {}^B r_z \right)^T$  を座標系  $\Sigma_A$  上で表すことを考えよう。座標系  $\Sigma_A$  からみた座標系  $\Sigma_B$  を構成する各軸の方向を表す単位ベクトルを  ${}^A\mathbf{x}_B$ ,  ${}^A\mathbf{y}_B$  および  ${}^A\mathbf{z}_B$  を用いれば、  ${}^B\mathbf{r}$  の成分を座標系  $\Sigma_A$  上で表したベクトル  ${}^A\mathbf{r}$  は次式で表される。

$${}^A\mathbf{r} = {}^A\mathbf{x}_B {}^B r_x + {}^A\mathbf{y}_B {}^B r_y + {}^A\mathbf{z}_B {}^B r_z \quad (4.15)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} {}^A r_x \\ {}^A r_y \\ {}^A r_z \end{pmatrix} = {}^A\mathbf{R}_B \begin{pmatrix} {}^B r_x \\ {}^B r_y \\ {}^B r_z \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

書き換えれば

$${}^A\mathbf{r} = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{r} \quad (4.17)$$

となり2次元の場合と一致する。ただし、3次元直交座標系における回転行列は各軸周りの回転に対して定義され、ロボットの姿勢や出力部の運動を表すために3つ必要となる。

3次元直交座標系における回転行列を実際に求めてみよう。3次元直交座標系  $o-x_A y_A z_A$  および座標系  $o-x_B y_B z_B$  をそれぞれ  $\Sigma_A$  および  $\Sigma_B$  とし、  $\Sigma_A$  を回転前および  $\Sigma_B$  を回転後の座標系とする。また、  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  および  $\mathbf{k}$  を、  $x_A$ ,  $y_A$  および  $z_A$  各軸方向の単位ベクトルとする。まず、図4.6に示すように、  $\Sigma_B$  が  $\Sigma_A$  と一致した状態から  $z$  軸まわりに  $\theta$  回転している場合の回転行列を、式(4.14)を参考に表せば次式となる。

$${}^A\mathbf{R}_B = \mathbf{E}^{k\theta} = \begin{pmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

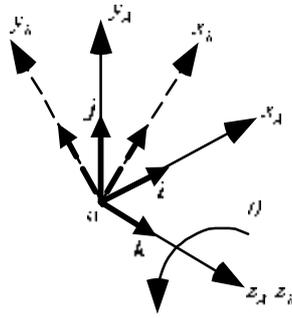


図 4.6 Z 軸まわりの回転行列

次に、図 4.7 に示す y 軸まわりの回転に関連する回転行列を求めれば次式となる。

$${}^A \mathbf{R}_B = \mathbf{E}^{j\theta} = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

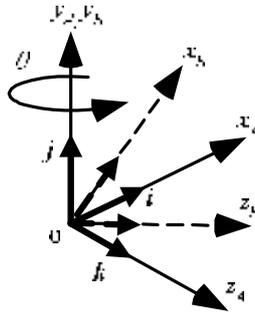


図 4.7 Y 軸まわりの回転行列

さらに、図 4.8 に示す x 軸まわりの回転行列を求めれば次式となる。

$${}^A \mathbf{R}_B = \mathbf{E}^{i\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta \\ 0 & S_\theta & C_\theta \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

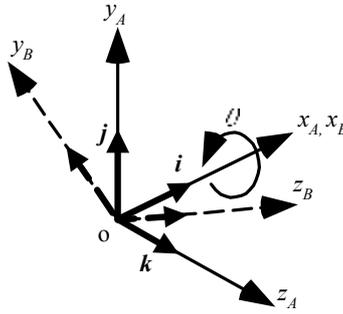


図 4.8 X 軸まわりの回転行列

なお、回転方向は、各ベクトルに沿って、右ねじが進行する場合を正とし、 $\mathbf{E}^{i\theta}$ 、 $\mathbf{E}^{j\theta}$ 、 $\mathbf{E}^{k\theta}$  はそれぞれ、直交座標系の各軸方向を示す単位ベクトル  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  周りに、 $\theta$  の回転変位を行うことを示している。式(4.18)~(4.20)はロボットの運動解析によく利用される。なお、補足として任意の回転軸周りの回転行列を示しておく。ベクトル  $\mathbf{r}$  が、任意の方向の単位ベクトル  $\boldsymbol{\eta}$  周りに  $\theta$  回転する場合、回転後のベクトル  $\mathbf{r}'$  は次式で表される。

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} + \cos\theta [\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}] + \sin\theta (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{r}) \quad (4.21)$$

上式を展開してベクトル  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  の関係を示す回転行列  $\mathbf{E}^{\boldsymbol{\eta}\theta}$  を求めれば次式となる。なお、ベクトル  $\boldsymbol{\eta}$  の成分を  $(\lambda, \mu, \nu)^T$  とする。

$$\mathbf{E}^{\boldsymbol{\eta}\theta} = \begin{pmatrix} \lambda^2(1-C_\theta) + C_\theta & \lambda\mu(1-C_\theta) - \nu S_\theta & \lambda\nu(1-C_\theta) + \mu S_\theta \\ \lambda\mu(1-C_\theta) + \nu S_\theta & \mu^2(1-C_\theta) + C_\theta & \mu\nu(1-C_\theta) - \lambda S_\theta \\ \lambda\nu(1-C_\theta) - \mu S_\theta & \mu\nu(1-C_\theta) + \lambda S_\theta & \nu^2(1-C_\theta) + C_\theta \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

上式にベクトル  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  を代入すれば式(4.20)、(4.19)、(4.18)となることが容易に確認できる。式(4.22)は、ロボットの運動をある特定の軸周りで検討・表現する場合などに用いられる。

(例題) 図 4.9 に示す開ループロボットのベース、各ジョイントおよび出力点に座標系  $\Sigma_A$ 、 $\Sigma_B$ 、 $\Sigma_C$ 、 $\Sigma_D$  および  $\Sigma_P$  を設定し、それぞれの座標系を構成する各軸を図中の記号で示す。波線で示す初期姿勢においてすべての座標系の  $x$ 、 $y$  および  $z$  軸の方向は等しいとする。なお、各座標系の  $x$ 、 $y$  および  $z$  軸方向を区別するために、図 4.9 中に示す様に下付け添え字を付す。

ロボットの各ジョイントを、 $\Sigma_B$  が  $y_B$  軸周りに  $\alpha$ 、 $\Sigma_C$  が  $z_C$  軸周りに  $\beta$ 、 $\Sigma_D$  が  $x_D$  軸周りに  $\gamma$  回転するように運動させた場合、出力リンクのベースに対する姿勢を回転行列を用

いて求めよ.

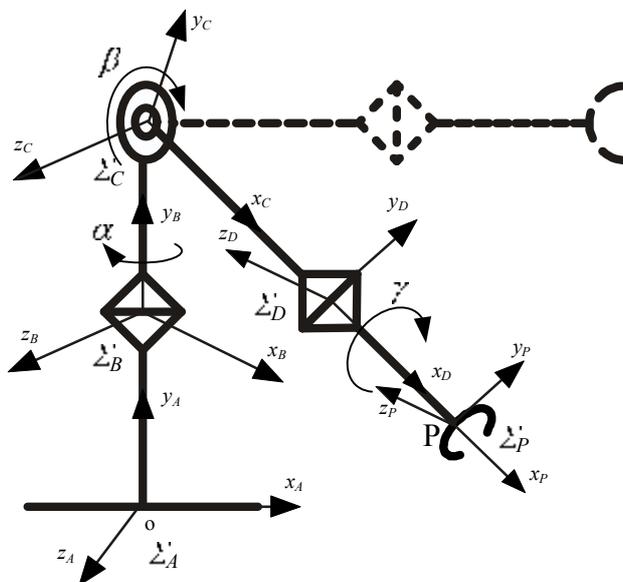


図 4.9 回転行列によるロボットの姿勢の表現

(解) 図 4.9 のロボットにおいてベースに設置された座標系は  $\Sigma_A$ , 出力リンクに設置された座標系は  $\Sigma_D$  および  $\Sigma_P$  であり,  $\Sigma_D$  と  $\Sigma_P$  の姿勢は常に一致していることから,  $\Sigma_A$  に対する  $\Sigma_D$  の関係, すなわち  ${}^A R_D$  を求めれば出力リンクの姿勢が表される. したがって,

$${}^A R_D = {}^A R_B {}^B R_C {}^C R_D \quad (4.23)$$

${}^A R_B$ ,  ${}^B R_C$ ,  ${}^C R_D$  はそれぞれ各座標系での  $y$  軸,  $z$  軸および  $x$  軸周りの回転である. (各軸の下付け添え字は省略する.) 各座標系における  $y$  軸,  $z$  軸および  $x$  軸方向の単位ベクトルを  $j$ ,  $k$  および  $i$  とすれば, それぞれ次式で表される.

$${}^A R_B = E^{j\alpha}, \quad {}^B R_C = E^{k\beta}, \quad {}^C R_D = E^{i\gamma} \quad (4.24)$$

したがって, 出力リンクの姿勢  ${}^A R_D$  は次式で表される.

$${}^A R_D = E^{j\alpha} E^{k\beta} E^{i\gamma} \quad (4.25)$$

上式に式(4.19), (4.18), (4.20)を用いれば,  ${}^A R_D$  が求められる.

#### 4.1.4 回転行列の逆行列

回転行列  ${}^A R_B$ , すなわち,  $({}^A x_B, {}^A y_B, {}^A z_B)$  の列成分である  ${}^A x_B, {}^A y_B, {}^A z_B$  は直交する 3 軸の方向を表す単位ベクトルである. すなわち, これらのベクトルが互いに直交する. し

たがって、回転行列は直交行列である。直交行列の逆行列はその転置行列に一致する。ここでは、ロボットの姿勢変換への理解を深めるために、回転行列の逆行列がその転置行列で表されることを実際に導いてみよう。

回転行列  ${}^A R_B$  の列成分である  ${}^A x_B, {}^A y_B, {}^A z_B$  は先述のように座標系  $\Sigma_A$  上でその成分を表した座標系  $\Sigma_B$  の各軸方向の単位ベクトルである。いいかえれば、これらは座標系  $\Sigma_B$  上における各軸方向の単位ベクトルの座標系  $\Sigma_A$  上への射影成分である。すなわち次式のよう表すことができる。

$${}^A R_B = \begin{pmatrix} {}^B i_B \cdot {}^A i_A & {}^B j_B \cdot {}^A i_A & {}^B k_B \cdot {}^A i_A \\ {}^B i_B \cdot {}^A j_A & {}^B j_B \cdot {}^A j_A & {}^B k_B \cdot {}^A j_A \\ {}^B i_B \cdot {}^A k_A & {}^B j_B \cdot {}^A k_A & {}^B k_B \cdot {}^A k_A \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

上式の行列中の各成分は、両座標系の各軸方向を表す単位ベクトル同士の余弦である。ここで  ${}^A R_B$  の 1 行目の成分に注目する。1 行目の成分からなる行ベクトルを考えれば、それは、座標系  $\Sigma_A$  における  $x$  軸方向の単位ベクトルの座標系  $\Sigma_B$  上への射影成分となっている。2, 3 行目に関しても同様に座標系  $\Sigma_A$  における  $y, z$  軸方向の単位ベクトルの座標系  $\Sigma_B$  上への射影成分となっていることがわかる。すなわち、 ${}^A R_B$  の各行は、座標系  $\Sigma_B$  で表した座標系  $\Sigma_A$  の各軸方向の単位ベクトルの成分となっており、次式で表すことができる。

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} ({}^B x_A)^T \\ ({}^B y_A)^T \\ ({}^B z_A)^T \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

さらに、上式の右辺は、結局、座標系  $\Sigma_B$  上で表したベクトルの成分を座標系  $\Sigma_A$  で表す回転行列  ${}^B R_A$  の転置行列となっている。したがって次式が成り立つ。

$${}^A R_B = ({}^B R_A)^T \quad (4.28)$$

以上のことから、ある座標系から他の座標系への関係を表す回転行列の転置行列は、逆の関係を表す回転行列となることがわかる。また、回転行列を構成する各列ベクトル、または各行ベクトルは、互いに直行し、さらに単位ベクトルとなる。すなわち、回転行列は正規直交行列であり次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} {}^A R_B {}^B R_A &= {}^A R_A \\ &= I \end{aligned} \quad (4.29)$$

したがって、回転行列の逆行列は次式で表される。

$$\begin{aligned} \left({}^A R_B\right)^{-1} &= {}^B R_A \\ &= \left({}^A R_B\right)^T \end{aligned} \quad (4.30)$$

以上の関係はロボットの運動学の計算を容易に行うための重要な関係式となる。

#### 4.1.5 同次変換行列による位置と姿勢の表現

ロボットを構成する各リンクの位置・姿勢を表すためには、回転とともに、ジョイントの並進運動や、リンクの長さなどによる並進変位を表現する必要がある。そこで、リンクの回転および並進変位を同時に表す方法を以下で説明する。

図 4.10 に示すように、2つの座標系  $\Sigma_A$  および  $\Sigma_B$  を想定する。これらの座標系は、それぞれ別の剛体、すなわち、リンク上に設定され、座標系の原点は、それぞれのリンクの回転中心、すなわちリンク上におけるジョイントの回転軸に設定されているとする。ここで座標系  $\Sigma_B$  においてベクトル  ${}^B r$  で表される点  $r$  の位置を座標系  $\Sigma_A$  で表すことを考えよう。座標系  $\Sigma_B$  の原点位置  $P$  が、座標系  $\Sigma_A$  に対してベクトル  ${}^A P_B$  で表されるとする。また、 $\Sigma_A$  および  $\Sigma_B$  の関係を表す回転行列を  ${}^A R_B$  とすれば、同行列により  ${}^B r$  の成分を  $\Sigma_A$  上での表現に変換することにより点  $r$  の位置は次式で表される。

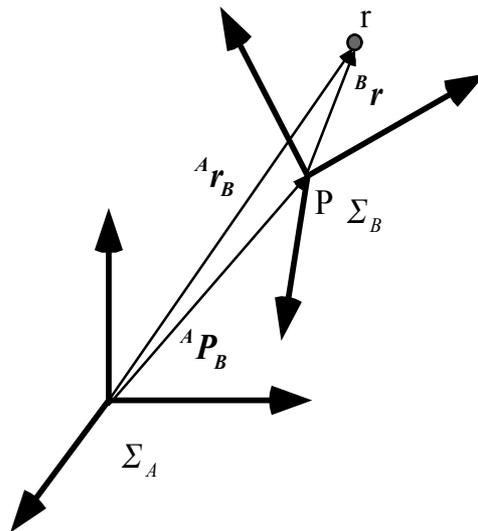


図 4.10 回転行列によるロボットの姿勢の表現

$${}^A r_B = {}^A R_B {}^B r + {}^A P_B \quad (4.31)$$

上式は、まず、座標系  $\Sigma_A$  および  $\Sigma_B$  の原点が一致している場合を想定し、両座標系間の回転に関する関係を回転行列で操作し、次に、 $\Sigma_A$  の原点を始点として、先端を  $\Sigma_B$  の原点とするベクトルを加えることにより、並進に関する操作を行っていると同様と解釈できる。式(4.31)を、さらに、以下のようにまとめて表記する。

$$\begin{bmatrix} {}^A r_B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B r \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

ベクトル  $\begin{bmatrix} {}^A r_B & 1 \end{bmatrix}^T$  中の "1" は表記を簡潔にするためのもので、物理的な意味はない。式

(4.32)における行列

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

を同次変換行列と呼ぶ。回転行列  ${}^A R_B$  が、2つの座標系間の傾きの関係を示していたことに対し、同次変換行列  ${}^A T_B$  は、2つの座標系間の傾きおよび位置関係を示すことになる。

同次変換行列を用いれば、各リンクの回転および並進変位を同時に表すことができる。ただし、前述のように同次変換行列では、まず回転に関する操作を行い、次に、並進に関する操作を行うことを想定した変換行列であることに注意が必要である。

以上で述べた同次変換行列により、ロボットの位置・姿勢を表す方法を具体的に示そう。図 4.11 は図 4.9 と同一のロボットであるが、位置を表現するためにベースから出力点 P までの接地点、各ジョイントを A, B, C, D で表して、各リンクをリンク AB, BC, CD とし、それぞれの長さを  $l_A, l_B, l_C, l_D$  とし、これらを始めとする必要な記号を付記して再度示した。

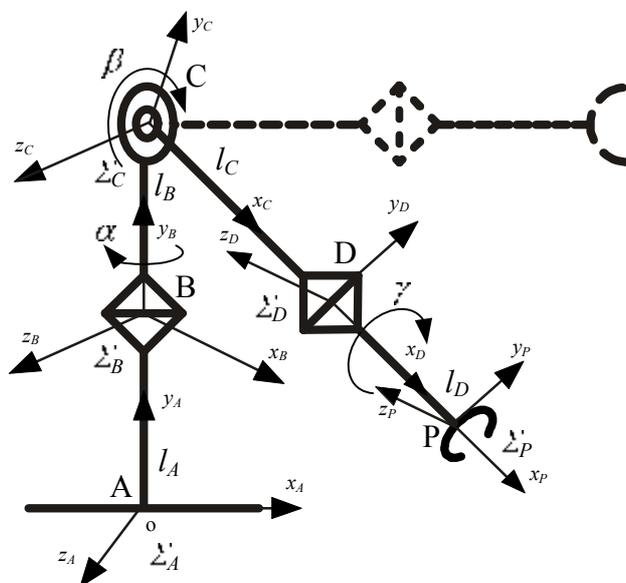


図 4.11 同次変換行列によるロボットの位置・姿勢の表現

同次変換行列または回転行列を用いてロボットの位置や姿勢を表現するために、各リンクに座標系を設定する必要がある。座標系の設定方法は任意であるが、例えば多関節ロボットでは、以下のような手順で初期姿勢における各ジョイントの回転軸方向が等しい、または、直交するなど、規則性を有するように設定すればロボットの位置・姿勢の表現が容易となる。

- 1) ロボットの初期姿勢を、主に作業を行う姿勢を考慮しながら、各ジョイントの回転軸がなるべく同一方向となり、かつ、各リンク長手方向が同一または直交するように設定する。
- 2) ベースを除く各リンク上に座標系の原点を設定する。通常、原点は各リンクにおいて隣接するベース側のリンクとの連結点とする。
- 3) 各リンクに設定された座標系の1つの軸方向を、ジョイントの回転軸とする。
- 4) 各リンクに設定された座標系のもう1つの軸方向として、隣接する出力リンク側のジョイントの回転軸との共通垂線方向を選択する。隣接する回転軸が互いに垂直である場合は、両回転軸方向で定義される平面の法線方向とすればよい。なお、出力リンクにおいては、隣接するベース側のリンクの回転軸方向を参照してもう1つの軸方向を設定する。通常の多関節ロボットでは、リンク長手方向が座標系の1つの軸方向となることが多い。

- 5) 以上で定義した 2 つの軸に対して, 右手座標系となるように直交座標系を設定する.
- 6) ベース上の座標系は, ロボットの接地点を原点として各軸方向が隣接する座標系と同一となるように設定し, さらに, 出力点を原点として, 各軸の方向を以上で決定した出力リンク上の座標系と等しくなるように設定する. なお, 出力点に設定された座標系は, 出力リンクの位置および姿勢を表すために用いる.

式エラー! 参照元が見つかりません。等では, 各座標系間の原点が一致している場合に以上のような関係式が成り立つことを述べたが, 同次変換行列を用いれば, 原点が一致していない場合においても同じ関係式が成り立つ.

以上の手順において, 各軸方向を示す  $x$ ,  $y$ ,  $z$  などの表記方は, 初期姿勢において各座標系での軸方向がなるべく同方向となるように定めればよい.

なお, 以上の方法は一般的な多関節ロボットの機構形式を対象とした座標系の設定例であり, 同方法が必ずしも適用できない場合, さらに, 適した設定方法が考えられる場合などもある.

図 4.11 の開ループロボットを例に, 座標系を設定し, その位置姿勢を同時変換行列で表してみよう. まず, 上述の方法に沿って各リンク上に座標系を設定する. すなわち

- 1) まず, ロボットの初期姿勢を破線で示すように設定する. この他, 例えばリンク AB から, リンク DP までが一直線となるように設定してもよい.
- 2) ベースを除く各リンク上に座標系の原点を設定する. ここでは, リンク BC 上においてリンク AB との連結部分に座標系  $\Sigma_B$  の, リンク CD 上にリンク BC との連結部に座標系  $\Sigma_C$  の, リンク DP 上にリンク CD との連結部に座標系  $\Sigma_D$  の原点をそれぞれ設定する.
- 3) 各リンクのジョイントの回転軸を, 各リンクに設定した座標系の一つの軸方向とする. ここでは,  $\Sigma_B$  の  $y_B$  軸をジョイント B の回転軸方向, 座標系  $\Sigma_C$  の  $z_C$  軸をジョイント C の回転軸方向, 座標系  $\Sigma_D$  の  $x_D$  軸をジョイント D の回転軸方向とする.
- 4) 各座標系のもうひとつの軸方向を決定する. まず, 座標系  $\Sigma_B$  について検討する.  $\Sigma_B$  の  $z_B$  軸と隣接する  $\Sigma_C$  の  $z_C$  軸は直交している. そこで,  $x_B$  軸は,  $\Sigma_B$  の原点を含み,  $z_B$  および  $z_C$  軸方向で定義される平面に対する法線方向として設定する. 同様に, 座標系  $\Sigma_C$  の  $y_C$  軸, 座標系  $\Sigma_D$  の  $y_D$  軸を設定する.
- 5) 以上で設定した各座標系において, 右手座標系となるように 3 つめの軸方向を

設定する.

- 6) ベースであるリンク AB に、接地点を原点とし各軸方向がそれぞれ初期姿勢における座標系  $\Sigma_B$  に等しい絶対座標系  $\Sigma_A$  を設定する. また、出力点である点 P を原点とする座標系  $\Sigma_P$  を、各軸方向が  $\Sigma_D$  と同一となるよう設定する.

次に、同時変換行列をする. 回転行列の場合と同じく、参照する座標系の記号を上付左添え字、対象とする座標系の記号を下付右添え字として、同時変換行列を表す. 例えば、座標系  $\Sigma_A$  と  $\Sigma_B$  の関係を表す同時変換行列を  ${}^A T_B$  と記す.  ${}^A T_B$  は、座標系  $\Sigma_A$  に対する座標系  $\Sigma_B$  の位置・姿勢を表示するとともに、座標系  $\Sigma_B$  上で表したベクトルの成分の座標系  $\Sigma_A$  上での表現への変換に用いられる.

以上で定義された同時変換行列を用いれば、図 4.11 においてベースに設定された絶対座標系  $\Sigma_A$  に対する出力点 P の位置と姿勢は  ${}^A T_P$  となり、次式より得られる.

$${}^A T_P = {}^A T_B {}^B T_C {}^C T_D {}^D T_P \quad (4.34)$$

ここで、図 4.8 と同じくジョイント B, C および D に、それぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$  および  $\gamma$  の角変位が生じる場合の絶対座標系に対する出力リンクの位置・姿勢を具体的に求めてみよう. なお、各座標系において  $x_w$ ,  $y_w$  および  $z_w$  ( $w=A\sim C$ ) 軸方向の単位ベクトルを、 $i$ ,  $j$  および  $k$  で表すこととする.

隣接するリンクの関係を表す同次変換行列を求めるには、まず対象とする座標系を基準となる座標系に一致させた状態から、回転、次に並進の順に操作を加え、現在の状態に変換するための方法を考えればよい. すなわち、 ${}^A T_B$  に関しては、まず、座標系  $\Sigma_B$  が  $\Sigma_A$  に一致した状態から、 $y_A$  軸周りに  $\alpha$  回転した後、 $y_A$  軸方向へ  $l_A$  並進移動すれば目的とする  $\Sigma_B$  の状態に一致することから、同次変換行列次式で表される.

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{j\alpha} & l_A \mathbf{j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

同様に、 $\Sigma_B$  は  $\Sigma_C$  に一致した状態から  $z_B$  軸周りに  $\beta$  回転し  $y_B$  軸方向へ  $l_B$  並進移動すればよい. 従って同次変換行列  ${}^B T_C$  は次式となる.

$${}^B T_C = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{k\beta} & l_B \mathbf{j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

同様に、 $\Sigma_C$  を  $\Sigma_D$ 、 $\Sigma_D$  を  $\Sigma_P$  に一致させる同次変換行列  ${}^C T_D$ ,  ${}^D T_P$  は、次式で表される.

$${}^c T_D = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{iy} & l_C \mathbf{i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$${}^D T_P = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^0 & l_D \mathbf{i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

なお、 $\mathbf{E}^0$ は単位行列を表す。以上の結果より出力リンクの絶対座標系に対する位置・姿勢は次式で表される。

$$\begin{aligned} {}^A T_P &= {}^A T_B {}^B T_C {}^C T_D {}^D T_P \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.39)$$

ただし

$$\mathbf{T}_{11} = \mathbf{E}^{j\alpha} \mathbf{E}^{k\beta} \mathbf{E}^{iy}, \quad \mathbf{T}_{12} = l_A \mathbf{j} + \mathbf{E}^{j\alpha} l_B \mathbf{j} + \mathbf{E}^{j\alpha} \mathbf{E}^{k\beta} l_C \mathbf{i} + \mathbf{E}^{j\alpha} \mathbf{E}^{k\beta} \mathbf{E}^{iy} l_D \mathbf{i}$$

上式において、 $\mathbf{T}_{11}$ が出力リンクの姿勢、 $\mathbf{T}_{12}$ が出力点の位置を示す。なお、ここでは各ジョイントを回転ジョイントとして、各リンクの長さは一定として扱ったが、並進ジョイントを用いる場合は、各リンクの長さを表している部分に並進変位量を付加すればよい。

以上のように、初期姿勢において各リンクに設置された座標系のそれぞれの軸方向が平行となるようにすれば、各座標系の回転は回転軸周りにものみ行えばよくわかりやすい。必ずしも、各軸方向が平行でない場合は、ジョイントの回転に加え、各軸を平行とする回転操作を加えればよい。

## 4.2 ロボットの出力運動の表現

### 4.2.1 並進運動と回転運動の表現

これまで、主にロボットの各ジョイントの運動と、出力リンクを始めとする各リンクの位置・姿勢との関係を表現するための基礎を学んだ。ロボットの運動学では、さらに、要求される作業を行うために、出力リンクやロボットによって移動させられるワークそのものの位置や姿勢の変化、すなわち、出力運動の表現方法を理解しておく必要がある。特に、出力リンクやワークの回転に関する表現は、並進とは扱いが異なるため注意が必要である。

図 4.12 に示す剛体の並進運動を例に説明しよう。剛体を点 A から点 B へ並進運動させる場合、 $x$ ,  $y$ ,  $z$  各軸方向への並進変位量  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  を示せばよい。この場合、各軸方向への運動の順位は任意であり、各方向への変位量の和が  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  となれば、剛体は目標とする位置に達する。

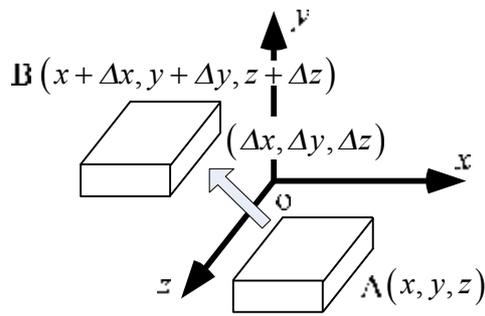


図 4.12 並進運動の表現

並進運動は以上のように各軸方向の変位量を示せばよく、ベクトルとして扱うことができ、その表現や演算は容易である。しかし、回転運動に関しては注意を要する。例として、図 4.13 に示す剛体を、初期姿勢が A から、 $x$  および  $y$  軸回りにそれぞれ  $90^\circ$  回転運動させる場合を考えよう。運動の順序としては、例えば、 $x$  軸回りに回転後、 $y$  軸回りに回転させる場合と、その逆が考えられる。そこで、図 4.13(a) に、剛体を  $x$  軸回りに  $90^\circ$  回転させた後、 $y$  軸回りに  $90^\circ$  回転させた場合を、図 4.13(b) に、剛体を  $y$  軸回りに  $90^\circ$  回転させた後、 $x$  軸回りに  $90^\circ$  回転させ、姿勢を  $A \rightarrow B \rightarrow C$  と変化させた結果を示す。図 4.13 からわかるように最終的な剛体 C の姿勢は異なり、複数の回転軸周りに関する回転運動には、運動の順序が影響することがわかる。したがって、出力リンクやワークを目標とする姿勢にするために回転運動を行わせる場合は、回転変位量だけでなく、その、順序を示さなければならない。すなわち、複数の回転軸周りに関するリンクやワークの回転運動はベクトルとして扱えない。ただし、瞬間的な物理量を示す回転速度、すなわち角速度に関しては、ベクトルとしての扱いが可能であり、各軸周りの角速度ベクトルの和により、全体としての角速度および瞬間的な回転軸を表すことができる。

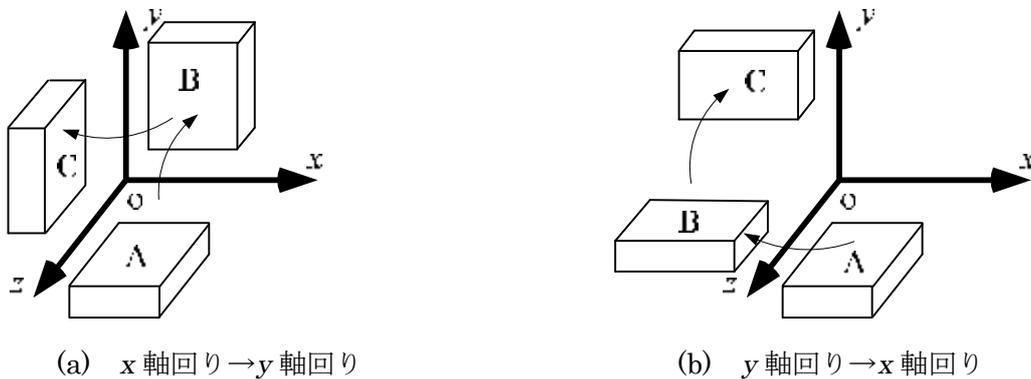


図 4.13 回転運動の表現

#### 4・2・2 回転運動の表現法～固定角法とオイラー角法～

リンクやワークを回転運動させる場合は、回転変位の量だけでなく、回転変位を行う順序を示す必要がある。回転運動の量と順序の表示方法としては、主に以下の2通りの方法がある。ひとつは図 4.14(a)のように固定された絶対座標系の各軸周りの角変位を示す方法であり固定角法と呼ばれる。代表的な固定角法は、固定された  $O-XYZ$  直交座標系に対して、 $X$  軸周り（ロール角）、 $Y$  軸周り（ピッチ角）、 $Z$  軸周り（ヨー角）の順序で回転運動を表示する方法でロール・ピッチ・ヨー角法と呼ばれることもある。固定角法では、基準となる回転軸が常に一定であるため、剛体を外から観察した場合に姿勢の変化を直感的に把握しやすい。

もう一つは図 4.14(b)に示すように、剛体に設定された動座標系の各軸周りの角変位で表す方法でありオイラー角法と呼ばれる。よく用いられるオイラー角法は、剛体上に設定された  $o-xyz$  動座標系の  $z$  軸、 $y$  軸、 $x$  軸周りの順で角変位を表す方法である。オイラー角法では剛体の姿勢変化とともに回転軸も変化する。しかし、剛体上から観察すれば回転軸は常に一定となる。固定角法とオイラー角法は、いずれも空間における剛体の回転運動を表現でき、その選択に関しては目的に適したものを選択すればよい。

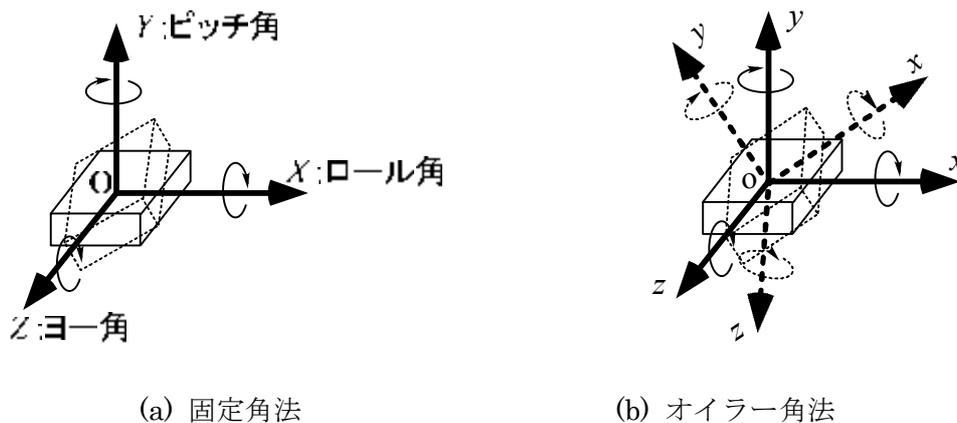


図 4.14 代表的な回転運動の表現法

なお、固定角法、オイラー角法いずれにおいても角変位の順序は、必ず直前に用いた主軸と異なる軸まわりの角変位を与えればよい。例えば、固定角法において、まず、 $X$  軸周りに回転し、次に、 $Y$  軸周りに回転し、さらに、 $X$  軸周りに回転させることで、空間での3自由度の運動を表現可能である。したがって、固定角法およびオイラー角法いずれの方法

も、それぞれ 12 通りの表示方法が存在する。

#### 4-2-3 固定角法とオイラー角法による姿勢の表現とその関係

O-XYZ 絶対座標系を基準とし、X 軸、Y 軸、Z 軸周りの順で角変位を与える固定角法と、剛体に固定された o-xyz 動座標系において、z 軸、y 軸、x 軸の順に回転運動を表すオイラー角法による姿勢の表現を、具体的に回転行列を用いて示すとともに両者の関係について考えてみよう。

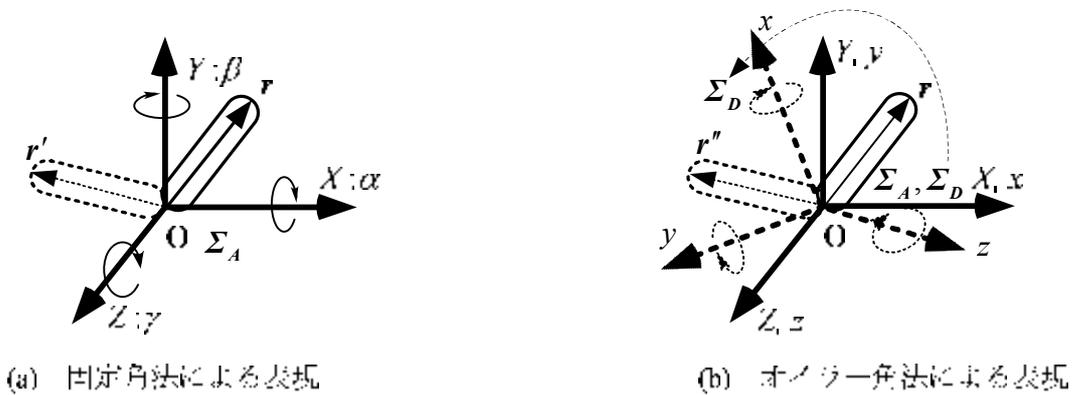


図4.15 姿勢表現の方法と比較

図 4.15(a)に示す 3次元直交絶対座標系  $\Sigma_A$  において固定角法を用い X 軸、Y 軸、Z 軸周りの順に、リンクを  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  の角変位で回転させた場合を検討する。なお、リンクの姿勢を、?と同様にリンク上に固定されたベクトル  $r$  で表す。回転後のリンクの姿勢を表すベクトルを  $r'$  とすれば、 $r'$  は回転行列を 4.1.2 で説明したように回転演算子として用いて表すことができる。すなわち、ベクトル  $r$  を X 軸周りに  $\alpha$ 、Y 軸周りに  $\beta$ 、さらに、Z 軸周りに  $\gamma$  回転させたベクトル  $r'$  は、式(4.18)~(4.20)を用いて次式で表される。

$${}^A r' = E^{k\gamma} E^{j\beta} E^{i\alpha} \cdot {}^A r \quad (4.40)$$

上付の A は先述のように、座標系  $\Sigma_A$  上でベクトルの成分を表していることを示し、 $i$ 、 $j$ 、 $k$  は X 軸、Y 軸、Z 軸方向の単位ベクトルを示す。

次に、剛体上に x 軸、y 軸および z 軸からなる 3次元直交動座標系  $\Sigma_D$  を定義し、オイラー角法でリンクの姿勢の変化を表す。なお、上述の固定角法との関係を示すため、座標系  $\Sigma_D$  は図 4.15(b)に示すように初期状態において  $\Sigma_A$  と一致しているとし、対象とするリンクの姿勢も図 4.15(a)と同一とする。同条件においてリンクの姿勢を、リンク上に設定さ

れた  $x$  軸,  $y$  軸および  $z$  軸周りにそれぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$  および  $\gamma$  回転させるとし, さらに, 回転の順序を  $z$  軸,  $y$  軸,  $x$  軸の順とする. リンクの姿勢は先と同じくベクトル  $\mathbf{r}$  で表す.

オイラー角法によって, 変化させたリンクの姿勢について考える. 初期姿勢におけるリンク上のベクトル  $\mathbf{r}$  に対し, オイラー角法により回転を行った後のベクトルを  $\mathbf{r}''$  で表す. ここで,  $\mathbf{r}''$  の成分を, 動座標系  $o\text{-}xyz$  で表せば, 座標系  $o\text{-}xyz$  は  $\mathbf{r}$  とともに回転するので成分は不変である. すなわち

$${}^D\mathbf{r}'' = {}^A\mathbf{r} \quad (4.41)$$

ただし,  ${}^D\mathbf{r}''$  はその成分を動座標系  $\Sigma_D$  で表し,  ${}^A\mathbf{r}$  はその成分を絶対座標系  $\Sigma_A$  で表している. したがって, 実際には両ベクトルは図 4.15(b) に示すように一致していない. そこで,  ${}^D\mathbf{r}''$  を絶対座標系  $\Sigma_A$  で表した  ${}^A\mathbf{r}''$  を求める.  $\Sigma_D$  で表された  ${}^D\mathbf{r}''$  の成分を座標系  $\Sigma_A$  で表すには回転行列を座標変換行列として利用すればよい. ここで, 図 4.15(b) では初期位置において動座標系  $\Sigma_D$  は絶対座標系  $\Sigma_A$  に一致しており, まず,  $z$  軸すなわち  $Z$  軸周りに  $\gamma$  回転する. 回転後の座標系を  $\Sigma_B$  とする. つぎに,  $\Sigma_B$  を  $y$  軸周りに  $\beta$  回転する. 回転後の座標系を  $\Sigma_C$  とする. さらに,  $\Sigma_C$  を  $x$  軸周りに  $\alpha$  の角変位で回転した座標系が, オイラー角法で回転した後の座標系  $\Sigma_D$  に一致する.

回転行列を用いれば, 絶対座標系  $\Sigma_A$  に対する動座標系  $\Sigma_B$  の関係は  ${}^A\mathbf{R}_B$  で表され, 同様に, 座標系  $\Sigma_B$  に対する座標系  $\Sigma_C$  の関係は  ${}^B\mathbf{R}_C$ , 座標系  $\Sigma_C$  に対する回転後の座標系  $\Sigma_D$  の関係は  ${}^C\mathbf{R}_D$  で表される. したがって, 回転変換後の剛体上のベクトル  ${}^D\mathbf{r}''$  の成分を絶対座標系  $\Sigma_A$  上で表せば次式となる.

$${}^A\mathbf{r}'' = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{R}_C {}^C\mathbf{R}_D {}^D\mathbf{r}'' \quad (4.42)$$

次に, 各回転行列の具体的な操作, すなわち, 回転演算子としての働きを考察する.  ${}^A\mathbf{R}_B$  は, 座標系  $\Sigma_A$  の各軸方向の単位ベクトルを  $Z$  軸周りに  $\gamma$  の角変位で回転することに相当するので次式が成り立つ.

$${}^A\mathbf{R}_B = \mathbf{E}^{k\gamma} \quad (4.43)$$

同様に  ${}^B\mathbf{R}_C$  は, 座標系  $\Sigma_B$  を  $y$  軸周りに  $\beta$  の角変位で回転し,  ${}^C\mathbf{R}_D$  は座標系  $\Sigma_C$  を  $x$  軸周りに  $\alpha$  の角変位で回転することに相当することから, それぞれ次式で表される.

$${}^B\mathbf{R}_C = \mathbf{E}^{j\beta} \quad (4.44)$$

$${}^C\mathbf{R}_D = \mathbf{E}^{i\alpha} \quad (4.45)$$

ここで,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  は座標系  $\Sigma_A$  の  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  軸, さらに,  $\Sigma_B$ ,  $\Sigma_C$ ,  $\Sigma_D$  における,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  軸方向の単位ベクトルを示す. したがって 式(4.42)は次式となる.

$${}^A\mathbf{r}'' = \mathbf{E}^{ky} \mathbf{E}^{j\beta} \mathbf{E}^{ia} \cdot {}^D\mathbf{r}'' \quad (4.46)$$

以上のようにしてオイラー角による姿勢変化の結果を絶対座標系から表すことができる。

ここで、固定角法とオイラー角法によって得られた結果を比較してみよう。まず、式(4.41)に示すとおり  ${}^D\mathbf{r}''$  と  ${}^A\mathbf{r}$  の成分は等しい。また、式(4.40)において、 $\mathbf{E}^{ia} \sim \mathbf{E}^{ky}$  における  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は絶対座標系の各軸方向を示し、式(4.46)では動座標系を含めた複数の座標系における各軸方向を示しているが、座標間の変換を順次行う場合、両式における  $\mathbf{E}^{ia} \sim \mathbf{E}^{ky}$  の成分は式(4.18)～(4.20)に示すとおりである。したがって、式(4.40)より得られる  ${}^A\mathbf{r}'$  と、式(4.46)より得る  ${}^A\mathbf{r}''$  は、成分が同一で参照する座標系が同じであることから互いに等しいことがわかる。

以上のように、固定角法およびオイラー角法において、基準となる姿勢で絶対座標系と、動座標系の各軸が一致している場合、角変位の大きさが等しく、変位の順序を逆にすれば、両者の方法で表される姿勢は一致することになる。

実際にロボットの出力節の姿勢の変化を表してみよう。例として図 4.16 に示すパラレルロボットを取りあげる。図 4.16 のパラレルロボットは破線および○で示す、出力リンクとベースを連結する各連鎖に、適当な自由度の対偶を配置してリンクで連結することにより、出力リンクに 6 自由度の運動、すなわち、出力リンクを直交する 3 軸方向に対して並進および回転させることができる。

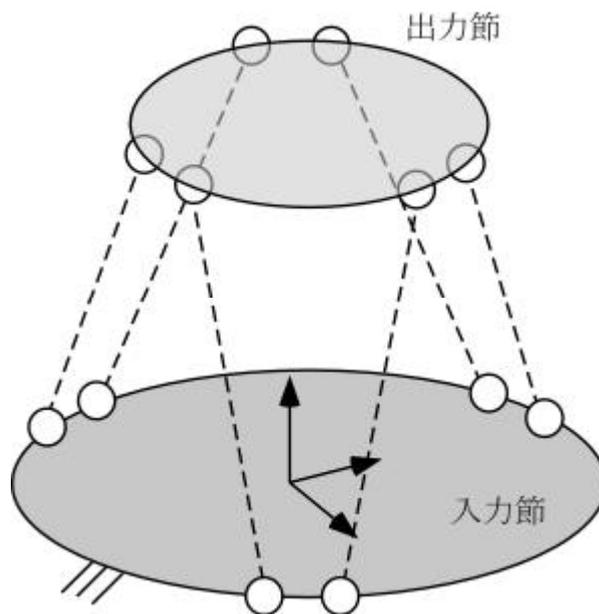


図 4.16 パラレルロボットの出力節の位置・姿勢

パラレルロボットの出力リンクの姿勢をまず固定角法で表してみる。出力リンクの回転運動を、ベースに固定された絶対座標系の  $X$  軸,  $Y$  軸,  $Z$  軸周りの順で与えることとし、それぞれの角変位大きさを  $\alpha$  (ロール角),  $\beta$  (ピッチ角),  $\gamma$  (ヨー角) とする。パラレルロボットの出力リンクの姿勢を、出力リンク上に固定された座標系  $P$ -xyz の絶対座標系  $O$ -XYZ に対する方向で表すことにする。初期姿勢においては座標系  $P$ -xyz の各軸方向は  $O$ -XYZ の各軸と平行であり、出力リンクの姿勢を表す行列  ${}^O R_P$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} {}^O R_P &= (i_P, j_P, k_P) \\ &= I_3 \end{aligned} \quad (4.47)$$

$I_3$  は 3 元の単位行列であり、 ${}^O R_P$  の各列成分は  $x, y, z$  各軸方向を示す列ベクトルである。 $X$  軸,  $Y$  軸,  $Z$  軸周りの順で、角変位  $\alpha, \beta, \gamma$  を与えた場合の出力リンクの姿勢は、絶対座標系の各軸周りの回転行列を回転演算子として用い次式で表される。

$${}^O R_P = E^{k\gamma} E^{j\beta} E^{i\alpha} I_3 \quad (4.48)$$

なお、上付添え字の  $i, j, k$  は、それぞれ  $X, Y, Z$  軸周りの回転であることを示している。式(4.48)において  ${}^O R_P$  の各列成分が回転後の出力リンク上の座標系  $P$ -xyz の各軸方向を示すことになる。

さて、パラレルロボットの制御は、通常、出力リンクの並進、回転による出力リンク上の各ジョイントの位置を求め、さらに、各連鎖においてそれぞれのジョイントが同位置を満たすように能動ジョイントを変位させる。絶対座標系に対して成分を表した出力リンク上の各ジョイントの位置ベクトルを  $J_l$  ( $l=1\sim 6$ ) とすれば、回転後のベクトル  $J'_l$  ( $l=1\sim 6$ ) は式を座標変換行列として用い次式で表される。

$$J'_l = E^{k\gamma} E^{j\beta} E^{i\alpha} J_l \quad (4.49)$$

以上で得られる  $J'_l$  を満たすように各連鎖を制御することで、出力リンクが  $X$  軸,  $Y$  軸,  $Z$  軸周りに  $\alpha, \beta, \gamma$  の順で回転させた場合の姿勢となる。

(例題) オイラー角法によって  $z$  軸,  $y$  軸,  $x$  軸の順に  $\gamma, \beta, \alpha$  の角変位で回転する図 4.16 のパラレルロボットの姿勢を表せ。

(解答) 初期姿勢である絶対座標系  $\Sigma_O$  から、 $z$  軸周りに  $\gamma$ ,  $y$  軸周りに  $\beta$  回転した座標系を  $\Sigma_B$ ,  $x$  軸の順に  $\alpha$  回転した座標系を  $\Sigma_P$  とすれば、それぞれの操作において回転前後の座標系の関係を表す回転行列は次式で表される。

$${}^0R_A = E^{k\gamma}, \quad {}^AR_B = E^{j\beta}, \quad {}^BR_P = E^{i\alpha}$$

したがって絶対座標系に対する出力リンクの姿勢は次式となり，式(4.48)と一致する．

$${}^0R_P = {}^0R_A {}^AR_B {}^BR_P = E^{k\gamma} E^{j\beta} E^{i\alpha}$$

### 4・3 順運動学と逆運動学

ロボットの能動ジョイントと出力リンクの関係を求める運動学を，逆運動学および順運動学と呼ぶ．逆運動学は出力リンクの位置・姿勢から各能動ジョイントの変位を求める場合であり，例えば図 4.17 では出力リンクの位置(X, Y)や姿勢  $\phi$  から各能動回転ジョイントの変位  $\theta_1 \sim \theta_3$  の値を求めることに相当する．ロボットの制御では作業を行うための出力リンクの位置・姿勢を実現する能動ジョイントの変位を，逆運動学を解くことによって得る．すなわち，ロボットの制御で逆運動学が占める役割は大きい．

順運動学は各能動ジョイントの変位から出力リンクの位置や姿勢を求める場合であり，図 4.17 では各能動回転ジョイントの変位  $\theta_1 \sim \theta_3$  の値が与えられたとして，その時の出力リンクの位置・姿勢を求めることに相当する．順運動学は例えば，ロボットの各能動ジョイントの変位から出力リンクの理論的な位置・姿勢を求め，実際の出力リンクの位置・姿勢との差から，ロボットの位置決め精度や機構誤差などを検討する場合，また，ロボットの設計時に各能動ジョイントの可動範囲に対する出力リンクの作業領域などを解析する場合に必要となることがある．

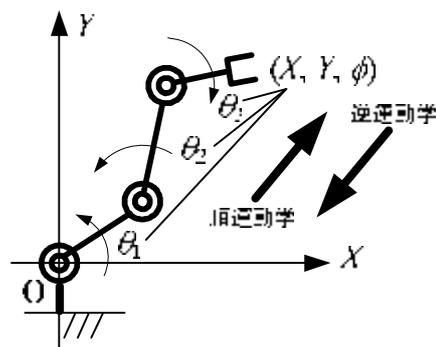


図4.17 順運動学と逆運動学

逆運動学および順運動学は，同一のロボットにおいて一方は容易に解けるが他方は容易に解けないことが多い．一般にシリアル形式のロボット，すなわち開ループロボットでは

順運動学の解析は容易であるが、逆運動学の解析は困難な場合が多く、パラレル形式のロボット、特にパラレルロボットでは順運動学の解析は困難で、逆運動学の解析は比較的容易である。

開ループロボットの順運動学と逆運動学を考えてみよう。開ループロボットの順運動学解析では各能動ジョイントの変位が与えられる。したがって、図 4.18(a)に示すようにベースから出力リンクに向かって連結される各リンクの位置・姿勢が順次機械的に決定できる。開ループロボットの順運動学は節数が多く、冗長な自由度を有する場合であっても、容易に解くことができる。4.1.5 項において図 4.11 の開ループロボットを対象に示した同時変換行列による出力リンクの位置・姿勢の決定は、順運動学解析を行ったものである。

開ループロボットの逆運動学解析では、出力リンクの位置または位置と姿勢が与えられ、ベースから出力リンクまでを連結する能動ジョイントの変位を求める。図 4.18(b)に示すように  $n$  番目の節を出力リンクとし、その位置・姿勢が与えられたとして  $n$  番目のリンクと  $n-1$  番目のリンクを連結する能動ジョイントの変位を決定することを考えよう。 $n-1$  番目のリンクは、図 4.18(b)に示すように他方のジョイントの位置が一点鎖線で示す円周上となればよい。しかし、その位置は機械的に決定できず、 $n-2$  番目のリンクからベースまでのリンクがすべて連結可能となるように決定する必要があり容易でない。また、このような条件を満たす解は複数存在する。したがって、開ループロボットの逆運動学解析は複雑な非線形方程式を解くことを要求され、さらに、複数の解から適切なものを選択する必要がある。また、ロボットの形式によっては逆運動学を解析的に解くことが不可能な場合も多く存在する。しかし、実際のロボットの制御では逆運動学は必須であることから、その対策として、ロボットを実際に動作させて能動ジョイントの変位を決定するティーチング<sup>0)</sup>、ロボットの微少な運動関係が線形になることを利用しヤコビ行列を用いる方法<sup>0)</sup>、また、運動学解析を繰り返し利用して逆運動学解析の代わりとする繰返し順変換法<sup>0)</sup>など斬新な方法も提案されている。

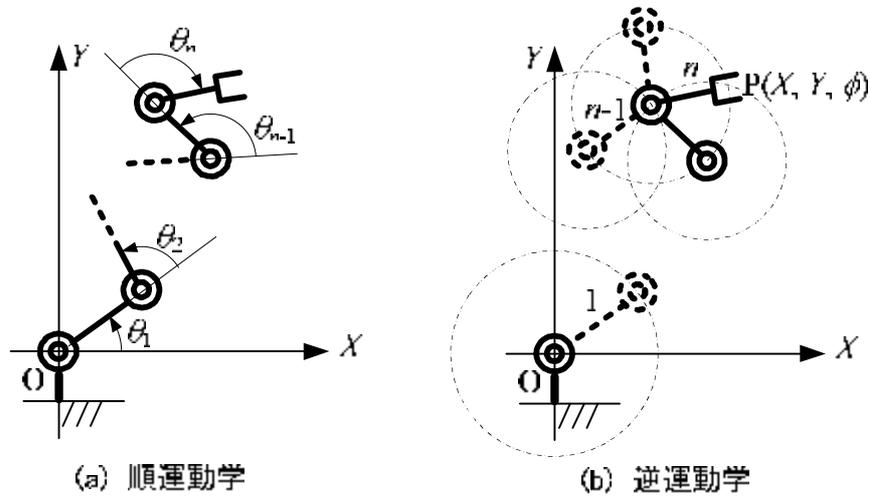


図4.18 開ループロボットの順運動学と逆運動学

(例題：2 節開ループロボットの逆運動学)

図 4.19(a)に示す開ループロボットの出力点位置  $P(X_p, Y_p)$  が与えられたとして，同位置を満たす各能動回転ジョイントの変位  $(\theta_1, \theta_2)$  を逆運動学解析により求めよ．

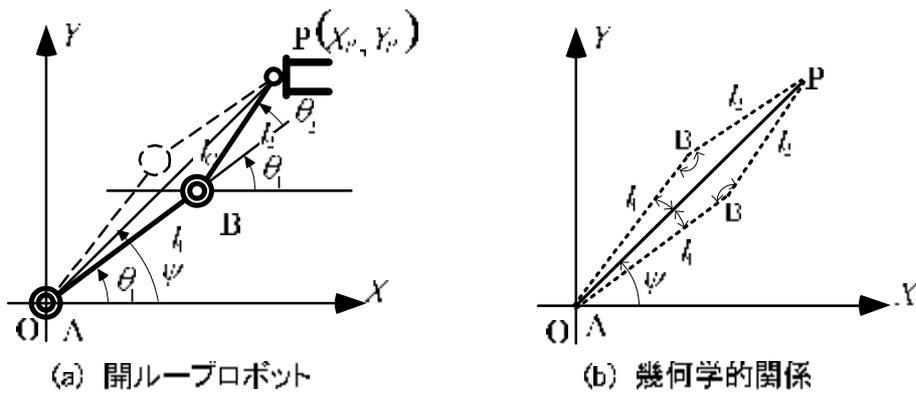


図4.19 開ループロボットの逆運動学解析

まず，出力点とベースとが連結される条件式を導く．

$$\begin{aligned} X_p &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ Y_p &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

上式は出力点位置と各ジョイントの角変位との関係式を導いたと解釈してもよい．次に，

図 4.19(a)中のように  $l_c$  および  $\Psi$  を定義する． $l_c$  および  $\Psi$  は次式で表される．

$$l_c^2 = X_p^2 + Y_p^2 \quad (4.51)$$

$$\Psi = \tan^{-1} \left( \frac{Y_P}{X_P} \right) \quad (4.52)$$

ここで、辺の長さが  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_c$  であり、 $XY$ 座標系において長さ  $l_c$  の辺の  $X$  軸からの傾きが  $\Psi$  で有る図 4.19(b)に示す  $\triangle ABP$  を考える. 図 4.19(b)より余弦定理を用いれば,  $\angle PAB$  は次式で表される.

$$\angle PAB = \cos^{-1} \left( \frac{l_1^2 + l_c^2 - l_2^2}{2l_1 l_c} \right) \quad (4.53)$$

また,  $\angle ABP$  は次式で表される.

$$\angle ABP = \cos^{-1} \left( \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_c^2}{2l_1 l_2} \right) \quad (4.54)$$

したがって, 図 4.19(a)との比較によりジョイントの角変位  $\theta_1$  は式(4.53)より次式となる.

$$\theta_1 = \Psi \pm \cos^{-1} \left( \frac{l_1^2 + l_c^2 - l_2^2}{2l_1 l_c} \right) \quad (4.55)$$

ここで, 図 4.19(b)では線分  $AP$  の傾きは与えられているが, 他の線分は任意である. したがって, 式(4.50)を満たす  $\angle PAB$  は線分  $AP$  を中心に 2 つ存在することに注意しなければならない. 同様に, ジョイントの角変位  $\theta_2$  は式(4.54)より次式となる.

$$\theta_2 = \pi \mp \cos^{-1} \left( \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_c^2}{2l_1 l_2} \right) \quad (4.56)$$

なお, 式(4.55)と(4.56)は複合同順である. すなわち, 与えられた出力点位置を満たす各能動回転ジョイントの角変位の組合せは 2 つ存在し, ロボットは, それぞれ図 4.19(a)に示すように 2 通りの姿勢をとる.

以上のように, 低自由度であれば開ループロボットの逆運動学解析は比較的容易である. しかし, 自由度が増加するにつれ, 幾何学的な条件が複雑となり, また, 解の数も増加することから, その解析は指数的に困難となる.

パラレル形式の機構を用いたロボットの順運動学, 逆運動学を, 図 4.20 に破線で示す 6 本の能動ジョイントを含む連鎖からなる 6 自由度空間パラレルロボットで考えてみよう. なお, 能動ジョイントを含む連鎖は, グリュブラーの式によって機構が 6 自由度空間機構となるように決定されるリンク, ジョイントからなるものとする. 以下, 能動ジョイントを含む連鎖を能動連鎖と記す. また, 能動連鎖とベースを連結するジョイントをベース側ジョイント, 能動連鎖と出力リンクを連結するジョイントを出力リンク側ジョイントと

呼び、いずれも回転または球ジョイントであるとする。

次に、パラレルロボットの順運動学解析では、6本の能動連鎖の長さが与えられたとして、ベース側および出力リンク側ジョイントの変位を求める。そのためには、まず、ベース側ジョイントを端点とした能動連鎖の姿勢を決定する必要がある。しかし、能動ジョイントの姿勢は機械的には決定されず、出力リンクとベースが各能動連鎖で連結される幾何学的条件から求める必要がある。図4.20の例では、長さが与えられた能動連鎖はベース側ジョイントを中心として多方向へ回転することができ、出力リンク側ジョイントと能動連鎖との連結箇所として広い範囲を検討する必要がある。これらの範囲から、全ての出力リンク側ジョイント間の相対的な位置関係が満たされるように、能動連鎖との連結位置を決定する必要がある。しかし、そのためには非線形な方程式を解く必要がありまた、解も複数存在することから、開ループロボットの順運動学と同様に解析的に求めることは困難である。

次に、パラレルロボットの逆運動学を考えよう。パラレルロボットの逆運動学では、まず、出力リンクの位置・姿勢が与えられる。出力リンクの位置・姿勢が与えられれば、出力リンク上の出力リンク側ジョイントの位置が機械的に決定される。また、ベース側ジョイントの位置は固定されていることから、出力リンク側ジョイントとベース側ジョイントを結ぶように能動連鎖の状態を決定することにより、逆運動学の解が得られる。パラレルロボットの逆運動学解析手順をまとめれば以下のとおりである。

1. 出力リンクの位置姿勢を与える。
  2. 出力リンクの位置姿勢より出力リンク側ジョイントの位置を求める。
  3. 出力リンク側ジョイントとベース側ジョイントを連結するように能動連鎖に含まれる能動ジョイントの変位を決定する。
3. において能動連鎖の端点位置は与えられるので、両端点を結ぶ変位を満たすように能動ジョイントの変位を決定することになる。一般にパラレルロボットでは、出力リンク側ジョイントとベース側ジョイントを結ぶ能動連鎖の構造は単純である。したがって、逆運動学は比較的容易に解くことができる。なお、前節において図4.16のパラレルロボットを対象に行った解析は以上の1.の例を示したものである。

なお、平行クランク形ロボットはパラレル形式のロボットであるが、機構の形式上開ループロボットの出力リンクを平行クランクを利用して駆動する形式となっており、運動学解析は開ループロボットと同様な扱いが可能であり、順運動学も比較的容易に解ける。ま

た，パラレル形式のロボットであっても，能動連鎖にアクチュエータが直列に配置されるなど複雑な構造である場合には逆運動解析はやはり困難になる．

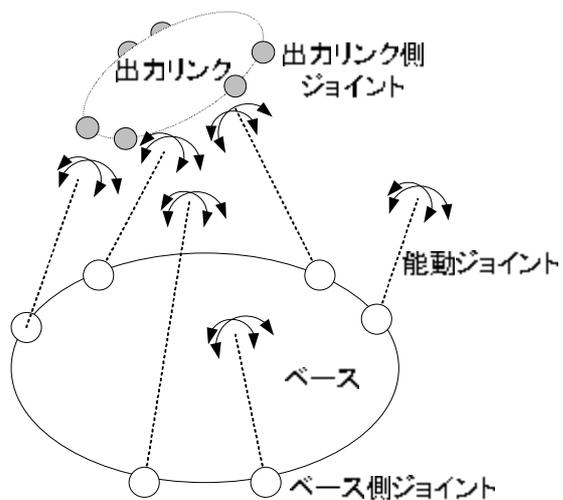


図4.20 パラレルロボットの順運動学と逆運動学